Université de Rennes 1, Licence Biologie, S1 2013-2014
Mathématiques (Analyse)

Corrigé du contrôle intermédiaire
Sujet du mardi 26 novembre

Q1. f est une fraction rationnelle, donc elle est définie et dérivable là où le dénominateur ne s'annule pas. On a $2x+1=0$ si et seulement si $x=-1/2$, d'où $Df = Df' = \mathbb{R}\backslash\{-1/2\}$.

Q2. Résolvons $4x^2+4x-3=0$. On calcule le discriminant: $\Delta = 16+16\times 3 = 64 = 8^2$, d'où les racines du trinôme sont

$$x_1 = \frac{-4+8}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4-8}{8} = \frac{-3}{2}.$$

Ainsi, le trinôme ne s'annule qu'en $x=-3/2$ et en $x=1/2$.

Q3. Dérivons f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x-5)(2x+1)-2(2x^2-5x-1)}{(2x+1)^2} = \frac{8x^2-6x-5-4x^2+10x+2}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{4x^2+4x-3}{(2x+1)^2}. \end{aligned}$$

Au numérateur, on reconnaît le trinôme dont on vient de déterminer les racines, et dont le coefficient dominant est positif, d'où le tableau de signes de f':

x	$-\infty$		$-3/2$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$4x^2+4x-3$		+	0	-		-	0	+	
$(2x+1)^2$		+		+	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	-	$\Vert$	-	0	+	

Q4. Déterminons les limites de $f(x)$

- lorsque $x \to -1/2$: le numérateur tend vers 2, et le dénominateur tend vers 0, donc les limites sont infinies en $-1/2$. Pour en déterminer le signe, on a, lorsque x tend vers $-1/2$ par valeurs inférieures, que $2x+1$ tend vers 0 par valeurs inférieures, et, lorsque x tend vers $-1/2$ par valeurs supérieures, que $2x+1$ tend vers 0 par valeurs positives, donc
$$\lim_{x\to -1/2^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -1/2^+} f(x) = +\infty.$$
- lorsque $x \to \pm\infty$: on utilise le théorème du plus haut degré pour écrire que
$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{2x^2}{2x} = x,$$
ainsi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Q5. D'après le tableau de signes de f' et les limites calculées ci-dessus, on dresse le tableau de variations de f:

x	$-\infty$		$-3/2$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$			$-11/2$		$\Vert$ $+\infty$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-\infty$ $\Vert$		$-3/2$		

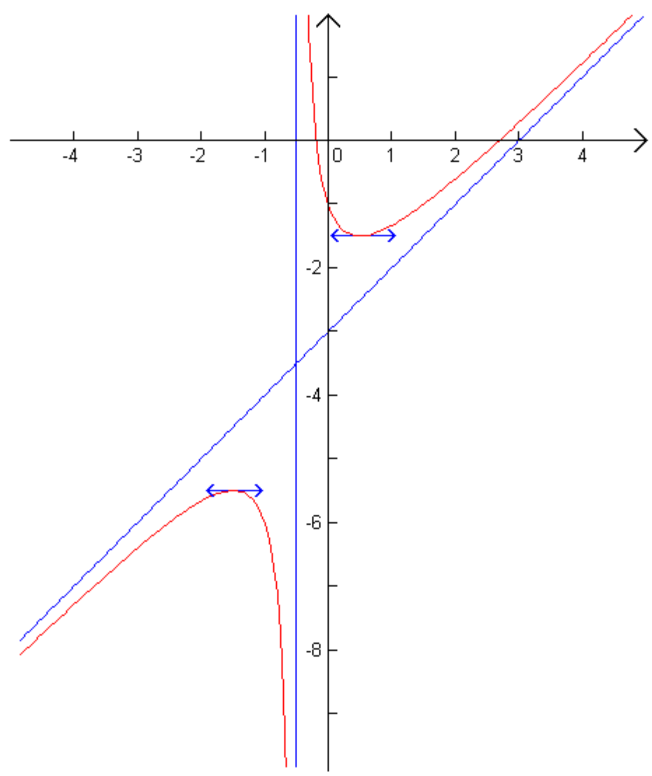
Q6. La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1/2$, puisque f admet des limites infinies en $-1/2$. La courbe n'admet pas d'asymptote horizontale car les limites lorsque x tend vers $\pm\infty$ sont infinies.

Q7. On met l'expression proposée au même dénominateur:

$$\frac{2}{2x+1} + x - 3 = \frac{2 + (x-3)(2x+1)}{2x+1} = \frac{2 + 2x^2 - 5x - 3}{2x+1} = f(x).$$

Q8. Calculons la limite lorsque x tend vers l'infini de $f(x) - (x-3)$. D'après la question précédente, cette quantité est égale à $2/(2x+1)$, et tend vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$, car $2x+1$ tend vers l'infini. $f(x)$ se comportant donc comme $x - 3$ à l'infini, on conclut que la courbe de f admet pour asymptote la droite d'équation $y = x - 3$.

Q9. On place les tangentes horizontales en $(-3/2, -11/2)$ et en $(1/2, -3/2)$, puis les asymptotes (verticale et oblique), et on peut tracer le graphe ci-contre.



Q10. En partant de l'égalité de la question 7, on peut utiliser la linéarité de l'intégrale:

$$\begin{aligned}\int^x f(t)\, dt &= \int^x \frac{2}{2t+1}\, dt + \int^x t - 3\, dt \\ &= \ln(2x+1) + \frac{x^2}{2} - 3x + C,\end{aligned}$$

le premier terme étant obtenu en reconnaissant que $2/(2t+1) = u'(t)/u(t)$, avec $u(t) = 2t+1$ (qui, au passage, est bien positif vu qu'on souhaite avoir les primitives sur $]-1/2, +\infty[$).