
M1-H02 (Analyse sur les variétés) - Exercices 2

2 Variétés Abstraites

2.1 Variétés topologiques

Exercice 2.1 Soit X un espace topologique. On dit que X est

- 1) à base dénombrable s'il admet une base dénombrable d'ouverts.
- 2) séparable s'il admet une partie dénombrable dense.
- 3) σ -compact s'il est séparé et union dénombrable de compacts.
- 4) dénombrable à l'infini s'il est séparé et s'il existe une suite exhaustive de compacts $(K_i)_{i \in I}$ de réunion X tels que K_i soit contenu dans l'intérieur de K_{i+1} .
- 5) paracompact s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de X admet un recouvrement localement fini $\{V_j\}_{j \in J}$ qui lui soit subordonné i.e. pour tout $j \in J$ il existe $i(j) \in I$ tel que $V_j \subset U_{i(j)}$ de plus tout point de X admet un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts V_j .

Soit X un espace topologique localement euclidien. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) X est séparé et à base dénombrable .
- 2) X est σ -compact.
- 3) X est dénombrable à l'infini
- 4) X est métrisable et séparable.
- 5) il existe un plongement topologique de X dans

$$l^2(\mathbb{R}) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^2 < +\infty\}$$

i.e. X est homéomorphe à un sous-espace de $l^2(\mathbb{R})$.

En déduire qu'une variété topologique est métrisable.

Montrer que toute variété topologique est paracompacte.

Donner un exemple d'espace localement euclidien paracompact mais qui ne soit pas à base dénombrable .

Exercice 2.2 Soient M et N deux variétés topologiques et $f : M \rightarrow N$ une application.

Montrer que si f est continue alors son graphe $G(f) = \{(x, y) \in M \times N; y = f(x)\}$ est une variété topologique de dimension $\dim M$ (munie de la topologie induit par celle de $M \times N$).

Exercice 2.3 Montrer que le théorème de Brouwer (Si U et V sont deux parties homéomorphes de \mathbb{R}^n et U est ouverte, alors V est ouverte) est une conséquence du théorème suivant :

Théorème de séparation de Jordan Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est une partie homéomorphe à la boule unité B^n (resp. à la sphère S^{n-1}) alors le complémentaire de A est connexe (resp. a 2 composantes connexes).

Exercice 2.4 Soit X un espace topologique. Soit \mathcal{A} une famille localement finie de sous-ensembles de X . (i.e. tout $x \in X$ admet un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de cette famille). Montrer que :

- 1) Toute sous-famille de \mathcal{A} est localement finie.
- 2) La famille $\mathcal{B} = \{\bar{A}\}_{A \in \mathcal{A}}$ des adhérences des éléments de \mathcal{A} est localement finie.
- 3) $\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$.

(en particulier, la réunion d'une famille localement finie d'ensembles fermés est un fermé)

Exercice 2.5 Soit $\mathcal{A} = \{]n, n + 2[; n \in \mathbb{N}\}$, dire quelle famille suivante est subordonnée à \mathcal{A} ?

$$\mathcal{B} = \{]x, x + 2[; x \in \mathbb{R}\}, \mathcal{C} = \{]n, n + \frac{3}{2}[; n \in \mathbb{Z}\}, \mathcal{D} = \{]x, x + \frac{3}{2}[; x \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2.6 Parmi les familles d'ouverts de \mathbb{R} suivantes lesquelles sont localement finies : $\mathcal{A} = \{]n, n + 2[; n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathcal{B} = \{]n, 2n[; n \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{C} = \{]0, \frac{1}{n}[; n \in \mathbb{N}^*\}$, $\mathcal{D} = \{] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[; n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 2.7 Montrer directement que \mathbb{R} est paracompact.

2.2 Variétés Différentielles

Exercice 2.8 Structure de variété sur l'espace projectif réel.

A) L'espace projectif réel $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est l'espace topologique, quotient de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ par la relation d'équivalence définie par :

$$x \sim y \quad \text{si et seulement si il existe } \lambda \in \mathbb{R}^* \quad \text{tel que } x = \lambda y$$

Soit $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la projection canonique, $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = [(x_1, \dots, x_{n+1})]$.

On munit $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ de la topologie quotient : V est ouvert dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\pi^{-1}(V)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.

Soient $U_j = \{[(x_1, \dots, x_{n+1})] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}); x_j \neq 0\}$ et $\phi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\phi_j([(x_1, \dots, x_{n+1})]) = \left(\frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_j}\right)$

a) En utilisant $\mathcal{A} = \{(U_j, \phi_j)\}_{1 \leq j \leq n+1}$, montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est une variété différentielle de classe C^∞ , compacte connexe de dimension n .

b) Montrer que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est difféomorphe à \mathbb{S}^1 .

B) On définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ par $v \sim w$ si et seulement si $v = \pm w$.

L'espace quotient \mathbb{S}^n / \sim est encore l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la projection canonique

Tout hyperplan P de \mathbb{R}^{n+1} divise \mathbb{S}^n en deux parties ouvertes (complémentaire de P dans \mathbb{S}^n). Soit H l'une d'elles.

a) Montrer que $\pi|_H : H \rightarrow \pi(H)$ est un homéomorphisme .

b) Soit $q : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow P$ la projection orthogonale sur P .

Montrer que $\phi_H = q \circ \pi|_H : \pi(H) \rightarrow B_P$ est un homéomorphisme où B_P est la boule unité ouverte de P .

c) Montrer que $\mathcal{A}' = \{(\pi(H), \phi_H)\}$ quand H parcourt l'ensemble des hémisphères ouvertes de \mathbb{S}^n , est un atlas de classe C^∞ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

d) Montrer que \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont compatibles i.e. définissent la même structure de variété sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Exercice 2.9 (Variétés produits)

Soient M et N deux variétés différentielles et soient $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ et $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ des atlas sur M et N respectivement.

On considère le produit cartésien $M \times N$ et les applications $\phi_i \times \psi_j(x, y) = (\phi_i(x), \psi_j(y))$, pour $x \in U_i$ et $y \in V_j$.

- a) montrer que $\{(U_i \times V_j, \phi_i \times \psi_j)\}_{(i,j) \in I \times J}$ est un atlas de $M \times N$, pour lequel les projections $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$ et $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$ sont différentiables.
- b) Supposons que les atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ et $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ soient maximaux. l'atlas $\{(U_i \times V_j, \phi_i \times \psi_j)\}_{(i,j) \in I \times J}$ est-il maximal ?
- c) Donner un atlas pour la structure différentielle de $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Exercice 2.10 Soit M une variété différentielle munie d'une structure différentielle de classe C^k donnée par l'atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$.

Soit $\Phi : M \rightarrow M$ un homéomorphisme.

Montrer que $\mathcal{A}_\Phi = \{(\Phi^{-1}(U_i), \phi_i \circ \Phi)\}_{i \in I}$ est un atlas de classe C^k sur M et que $\Phi : (M, \mathcal{A}_\Phi) \rightarrow (M, \mathcal{A})$ soit un difféomorphisme i.e. \mathcal{A}_Φ et \mathcal{A} sont isomorphes.

Exercice 2.11 Soit M une variété différentielle et G un groupe de Lie de C^k . Une action (à gauche) différentiable de G sur M est une application classe C^k $\mu : G \times M \rightarrow M$, notée $\mu(g, x) = gx$ telle que

(1) $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$, pour tout $g_1, g_2 \in G$ et pour tout $x \in M$.

(2) $ex = x$, pour tout $x \in M$. (e est l'élément neutre de G .)

1) On dit que l'action de G est propre si l'application $G \times M \rightarrow M \times M$ définie par $(g, x) \mapsto (x, gx)$ est propre.

Montrer que si l'action est propre alors M/G est séparé.

2) On dit que l'action de G est sans point fixe si : pour tout $x \in M$ et pour tout $g \in G$ différent de l'élément neutre e , $gx \neq x$.

Montrer que si G est un groupe fini et que son action sur M est sans point fixe, alors son action est aussi propre. En déduire que M/G est une variété différentielle de classe C^k .

3) Montrer que si H est un sous-groupe de Lie fermé de G , alors l'action de H sur G est propre et sans point fixe.

(Remarque : On montre que si l'action de G est propre et sans point fixe alors, il existe sur M/G une unique structure de variété différentielle de classe C^k , de dimension $\dim(M) - \dim(G)$ et telle que la projection canonique $\pi : M \rightarrow M/G$ soit une submersion.)

Exercice 2.12 L'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de \mathbb{R}^n est noté $G_{k,n}$, on l'appelle variété de Grassmann ou encore grasmannienne.

Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension $n - k$. On pose $U_W = \{P \in G_{k,n}; P \cap W = 0\}$ et $\phi_W : U_W \rightarrow \text{Projections}(\mathbb{R}^n, W)$, telle que $\phi_W(P)$ est la projection sur W le long de P .

Montrer $\mathcal{A} = \{(\phi_W, U_W); W \in G_{n-k,n}\}$, munit $G_{k,n}$ d'une structure de variété différentielle de classe C^∞ et de dimension $k(n - k)$.

Exercice 2.13 L'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est l'espace topologique, quotient de $\mathbb{C}^{n+1} - 0$ par la relation d'équivalence définie par :

$$x \sim y \quad \text{si et seulement si il existe } \lambda \in \mathbb{C}^* \quad \text{tel que } x = \lambda y$$

- a) Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ a une structure de variété C^∞ de dimension (réelle) $2n$.
- b) Montrer que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est difféomorphe à \mathbb{S}^2 . (on pourra utiliser les cartes des atlas pour construire le difféomorphisme)

Exercice 2.14 Soit $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application définie par :

$$f(x, y, z) = (yz, xz, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2)$$

Montrer que f passe au quotient, en un plongement

$$\tilde{f} : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4.$$

C) Soit $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par :

$$f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$$

Trouver 6 points $p_1, \dots, p_6 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tels que

$$\tilde{g} : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) - \{p_1, \dots, p_6\} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

soit une immersion .

Exercice 2.15 1) Soient N une sous-variété d'une variété M , et P une sous-variété de N . Montrer que F est une sous-variété de M .

2) Soient N une sous-variété d'une variété M , P une variété et $f : P \rightarrow N$ une application différentiable. Montrer que f est une immersion si et seulement si c'est une immersion en tant qu'application de P dans M .

3) Soit M une variété de dimension n . Alors, pour tout $k \leq n$ il existe un plongement de \mathbb{R}^k dans M .

Exercice 2.16 1) Soit M une variété différentielle et $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme involutif et sans point fixe i.e. $f \circ f = \text{id}_M$ et pour tout $x \in M$, $f(x) \neq x$.

Soit \sim la relation d'équivalence sur M définie par $x \sim y$ si et seulement si $y = f(x)$. Montrer que M/\sim a une structure différentielle unique telle que la projection canonique $M \rightarrow M/\sim$ soit un difféomorphisme local.

Exercice 2.17 Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ donnée par $\phi(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}zx, \sqrt{2}xy)$.

- Montrer que $M = \phi(\mathbb{R}^3 - \{0\})$ est une sous-variété de \mathbb{R}^6 .
- Montrer que $M \cap \mathbb{S}^5$ est une sous-variété de \mathbb{S}^5 , difféomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
- On identifie \mathbb{R}^n avec l'ensemble des polynômes de degré $\leq n - 1$. En utilisant l'application $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ définie par :

$$x + yt + zt^2 \mapsto (x + yt + zt^2)^2$$

construire un plongement de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans \mathbb{S}^4 .

Exercice 2.18 Montrer que $D_{a,r} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2\}$, avec $0 < r < a$ est une sous-variété de \mathbb{R}^3 difféomorphe au tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Exercice 2.19 Soit M une variété de classe C^k , $U \subset M$ un ouvert, $K \subset U$ un fermé de M et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k .

Montrer que la restriction $f|_K$ admet un prolongement C^k , $F : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 2.20 Soit M une variété différentiable de classe C^k et E une partie discrète et fermée de M . soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application quelconque.

Montrer qu'il existe une application de classe C^k , $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F|_E = f$.

Exercice 2.21 Soit M une variété différentielle de classe C^∞ et F une partie fermée de M .

Montrer qu'il existe une application de classe C^∞ , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f^{-1}(0) = F$.

2.3 Fibrés et champs de vecteurs

Exercice 2.22 Soient M une sous-variété de \mathbb{R}^n et $x \in M$.

On note $\Pi : M \rightarrow T_x M$ la restriction à M de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$. Calculer l'application linéaire tangente de Π en x .

Exercice 2.23 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$. En déduire que $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ est parallélisable.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le tore \mathbb{T}^n est parallélisable.

3) Montrer que \mathbb{S}^3 est parallélisable.

Exercice 2.24 Montrer que $T\mathbb{S}^{n-1}$ est difféomorphe à la sous-variété de \mathbb{C}^n
 $V = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; \sum_{i=1}^n z_i^2 = 1\}$.

Exercice 2.25 (Théorème de plongement de Whitney)

(1) Soit $M^m \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété différentielle, de classe C^k , $k \geq 1$. on définit "l'application exponentielle" $e : TM \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $e(x, v) = x + v$. Montrer que si $n > 2m$ alors l'image de e est de mesure nulle .

(2) On suppose que $n > 2m$. Soit \mathbb{R}_+^n et \mathbb{R}_-^n les demi-espaces formés des points tels que la $n^{i\text{eme}}$ coordonnée x_n est > 0 respectivement < 0 .

On suppose que $M^m \subset \mathbb{R}_-^n$ et $p \in \mathbb{R}_+^n$. Soit $f_p : M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ définie par $f_p(x) =$ le point où la droite qui passe par p et x rencontre l'hyperplan $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

Montrer que pour presque tout $p \in \mathbb{R}_+^n$, f_p est une immersion.

(3) On suppose $n > 2m + 1$. Montrer que pour presque tout $p \in \mathbb{R}_+^n$, l'application f_p est injective.

(ind. : On pourra utiliser l'application $F : (M \times M - \Delta(M)) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $F(x_1, x_2, t) = (1-t)x_1 + tx_2$ où $\Delta(M) = \{(x, x) \in M \times M\}$.)

(4) En déduire que si M est compacte et de dimension m , il existe un plongement de M dans \mathbb{R}^{2m+1} .

(Remarque : ce résultat est vrai même si M n'est pas compacte)

Exercice 2.26 Soient M une variété différentielle, de classe C^k et de dimension m , et G un sous-groupe du groupe des difféomorphismes de M dont l'action sur M est de classe C^k , proprement discontinue et sans point fixe.

(1) Montrer que l'application $G \times TM \rightarrow TM$ définie par $(g, (x, v)) = (g(x), T_x g(v))$ est proprement discontinue et sans point fixe. En déduire que TM/G est une variété différentielle de dimension $2m$.

- (2) Montrer que la projection $p : TM \rightarrow M$ passe au quotient en une application $\tilde{p} : TM/G \rightarrow M/G$ et que c'est un fibré vectoriel sur M/G .
 (3) Montrer que les fibrés sur M/G , $T(M/G)$ et TM/G , sont isomorphes.
 (4) En déduire que le fibré tangent à $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est isomorphe à

$$\{(x, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1, \langle x, v \rangle = 0\} / \sim$$

où \sim est la relation d'équivalence $(x, v) \sim (-x, -v)$.

Exercice 2.27 Soient X_1 et X_2 deux champs de vecteurs de \mathbb{R}^n .

On suppose \mathbb{S}^n est équipé de l'atlas à deux cartes $\{(U_N, \phi_N), (U_S, \phi_S)\}$ (projections stéréographiques par rapport aux pôles.)

Quelle conditions doivent satisfaire X_1 et X_2 pour qu'ils représentent le même champ de vecteurs Y de \mathbb{S}^n ?

Exercice 2.28 A) Soient $p : E \rightarrow B$ et $p' : E' \rightarrow B$ deux fibrés vectoriels de même base B . On note $F = \{(b, e, e') | e \in E, e' \in E', p(e) = p'(e') = b\}$. Montrer qu'il est naturellement muni d'une structure de fibré vectoriel au-dessus de B , dont les fibres sont somme directe des fibres de E et de E' . On note ce fibré $E \oplus E'$.

Exemple : $E = T\mathbb{S}^n$ et $E' = \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ sont deux fibrés vectoriels au-dessus de \mathbb{S}^n . Montrer que $E \oplus E'$ est trivialisable.

B) Soient $p : E \rightarrow B$ un fibré vectoriel de base B et $f : B' \rightarrow B$ une application de classe C^k .

Montrer qu'il existe un fibré vectoriel $p' : E' \rightarrow B'$ (unique à isomorphisme près) et un isomorphisme linéaire entre les fibres $F : E' \rightarrow E$ tels que $p \circ F = f \circ p'$. Le fibré E' est le fibré induit par f , est noté f^*E .

Exercice 2.29 Soit M^n une variété différentielle connexe de dimension ≥ 2 .

- 1) Soient $x, y \in M$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme f de M tel que $f(x) = y$. (on pourra d'abord traiter le cas où x et y sont proches.)
- 2) Plus généralement, soient x_1, \dots, x_k et y_1, \dots, y_k deux k -uplets de points deux à deux distincts de M . Montrer qu'il existe un difféomorphisme f de M tel que $f(x_i) = f(y_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.
- 3) Soient x_1, \dots, x_k des points de M , Montrer qu'il existe un ouvert U de M difféomorphe à \mathbb{R}^n et les contenant tous.

Exercice 2.30 Pour chaque champ de vecteurs, déterminer ses courbes intégrales et dire s'il est complet :

- 1) $X = \frac{\partial}{\partial x}$ dans $\mathbb{R}^2 - \{0\}$
- 2) $X = e^{-x} \frac{\partial}{\partial x}$ dans \mathbb{R}^2
- 3) $X = x \frac{\partial}{\partial x}$ dans \mathbb{R}^2
- 4) $X = \frac{\partial}{\partial y} + e^x \frac{\partial}{\partial z}$ dans \mathbb{R}^3
- 5) $X = y \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial y}$ et $[X, Y]$ dans \mathbb{R}^2
- 6) $X = y \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z}$ dans \mathbb{R}^2

Exercice 2.31 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère l'application $\phi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par :

$$x \mapsto \phi_t(x) = (x \cos(t) + y \sin(t), -x \sin(t) + y \cos(t))$$

- Montrer que $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe à 1-paramètre de difféomorphismes de \mathbb{R}^2 i.e. l'application de $\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$, $t \mapsto \phi_t$ est un homomorphisme de groupes.
- Déterminer le champ de vecteurs X dont le flot est $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$.
- Vérifier que X est invariant par $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$
- Décrire les orbites de X .

Exercice 2.32 Soit X un champ de vecteur sur \mathbb{S}^n .

On considère sur $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ les champs de vecteurs définis par :

$$X_1(x) = \|x\| \cdot X\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \quad X_2(x) = X\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \quad \text{et} \quad Y(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

Calculer $[X_1, Y]$ et $[X_2, Y]$.

Exercice 2.33 Définir sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ des champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$ de norme 1. Calculer leur crochet de Lie.

Exercice 2.34 Soit M une variété de dimension 2 et X et Y deux champs de vecteurs sur M .

Montrer qu'au voisinage d'un point où X et Y sont linéairement indépendants, il existe des fonctions strictement positives f et g telles que $[fX, gY] = 0$.

Exercice 2.35 Soit le champ de vecteurs $X = x \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$ sur $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0, y > 0, z > 0\}$. Soit \mathcal{D} la distribution déterminée par les champs de vecteurs orthogonaux en tout point de M à X .

Est-ce que \mathcal{D} est involutive ?

Exercice 2.36 On considère sur \mathbb{R}^3 la distribution déterminée par

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2xz}{1+x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial z}, Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2yz}{1+x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial z}.$$

- 1) Montrer que \mathcal{D} est involutive.
- 2) Déterminer les flots Φ^X et Φ^Y de X et Y .
- 3) Déterminer la variété intégrale de \mathcal{D} .

Exercice 2.37 Soit M une variété et X et Y deux champs de vecteurs complets sur M de flot respectifs Φ^X et Φ^Y .

- 1) Si $M = \mathbb{R}^n$, montrer que :

$$[X, Y](0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \Phi_t^Y \circ \Phi_t^X \circ \Phi_{-t}^Y \circ \Phi_{-t}^X(0)$$

- 2) En déduire que si les flots Φ^X et Φ^Y commutent (i.e. $\Phi_t^Y \circ \Phi_s^X = \Phi_s^X \circ \Phi_t^Y$ pour tous s et t dans \mathbb{R}) alors $[X, Y]$ est identiquement nul.

Exercice 2.38 Soient M une variété connexe de dimension n et X_1, \dots, X_n des champs de vecteurs complets partout linéairement indépendants.

- 1) Montrer que le sous-groupe de difféomorphisme de M engendré par les flots des champs X_i agit transitivement sur M i.e. pour tous x et y points de M il existe k champs de vecteurs X_{i_1}, \dots, X_{i_k} choisis parmi les champs X_i (un champ X_i peut être choisi plusieurs fois) et des réels t_1, \dots, t_k tels que $\Phi_{t_1}^{X_{i_1}} \circ \dots \circ \Phi_{t_k}^{X_{i_k}}(x) = y$.
- 2) On suppose maintenant que M est de dimension 3 et que $k = 2$. Montrer que si pour tout $x \in M$, $X_1(x), X_2(x)$ et $[X_1, X_2](x)$ engendrent $T_x M$, alors le sous-groupe de difféomorphismes de M engendré par les flots des champs X_1 et X_2 agit transitivement sur M .

3 Formes différentielles et théorème de Stokes

Exercice 3.1 *Etudier l'orientabilité des variétés suivantes :*

- Le ruban de Mobius $M = \{(x, t); x \in [0, 1], t \in \mathbb{R}\} / \sim$ où \sim est la relation d'équivalence $(0, t) \sim (1, -t)$.*
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Exercice 3.2 *Soit ω la $(n-1)$ -forme sur \mathbb{R}^n définie par $\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n$. Calculer $d\omega$.*

Soit $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Que vaut A^ω?*

Exercice 3.3 *Montrer que la restriction à \mathbb{S}^3 de la forme différentielle*

$$\omega = xdy - ydx - tdz + zdt$$

de \mathbb{R}^4 , ne s'annule pas. Montrer qu'il n'existe pas de 1-forme α telle que $d\omega = \alpha \wedge \omega$.

Exercice 3.4 *Soit ω une 1-forme ne s'annulant pas sur une variété M . Montrer que $d\omega \wedge \omega = 0$ si et seulement si il existe une 1-forme θ telle que $d\omega = \theta \wedge \omega$.*

Exercice 3.5 *Soit $\omega = (z - x^2 - xy)dx \wedge dy - dy \wedge dz - dz \wedge dx$ une 2-forme de \mathbb{R}^3 .*

Calculer $\int_D i^\omega$ où i est l'inclusion de $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ dans \mathbb{R}^3 .*

Exercice 3.6 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , et D une sous-variété compacte connexe à bord ∂D de \mathbb{R}^2 . On suppose que $f|_{\partial D} = 0$.*

- Montrer que $\int_D f \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx \wedge dy = - \int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 dx \wedge dy$.*
- En déduire que si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur D , alors $f|_D = 0$.*

Exercice 3.7 *Soit X une variété compacte orientable de dimension n , orientée via une forme volume ω_0 . Soit ω une $(n-1)$ -forme différentielle sur X . Montrer que la n -forme $d\omega$ s'annule sur X .*

En déduire qu'il n'y a pas d'immersion de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^1 .

Exercice 3.8 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^3 tel que son adhérence soit une variété à bord. Soit ν le champ de vecteurs unitaire normal sortant du bord $\partial\Omega$ et $X(x) = \sum_{i=1}^3 a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 .

a) Trouver une 2-forme différentielle ω telle que

$$d\omega = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

b) Soit $x \in \partial\Omega$. Soit (u, v) un système de coordonnées locales de x dans un voisinage U de x dans $\partial\Omega$, telles que $(\nu, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v})$ soit une base directe.

on pose $\frac{\partial}{\partial u} = \sum_{i=1}^3 u_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial}{\partial v} = \sum_{i=1}^3 v_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Déterminer $\omega(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v})$ en fonction de X , $\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{\partial}{\partial v}$.

b) Démontrer la formule suivante :

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right) dV = \int_{\partial\Omega} \langle \nu, X \rangle d\sigma$$

où dV est l'élément de volume sur \mathbb{R}^3 et $d\sigma$ est l'élément de surface sur $\partial\Omega$.

Exercice 3.9 a) Soient M^m et N^n deux variétés de classe C^k $k \geq 1$. Deux applications f_0 et f_1 de M dans N sont dites C^k -homotopes s'il existe une application de classe C^k , $F : [0, 1] \times M \rightarrow N$ telle que $F(0, x) = f_0(x)$ et $F(1, x) = f_1(x)$ pour tout $x \in M$. On suppose M compacte et orientée. Soit ω une n -forme fermée sur N .

Montrer que

$$\int_M f_0^* \omega = \int_M f_1^* \omega.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \in \Gamma(T\mathbb{S}^n)$ un champ de vecteurs sans zéros.

Montrer que l'application F définie par $F(t, x) = \cos(t\pi)x + \sin(t\pi) \frac{X(x)}{\|X(x)\|}$ est une homotopie entre l'identité et l'antipodie de \mathbb{S}^n i.e. l'application $x \mapsto -x$.

c) Soit $\omega = \sum_{i=0}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n$.

Montrer que $\int_{\mathbb{S}^n} \omega > 0$.

d) En déduire que si $n \equiv 0[2]$, \mathbb{S}^n n'est pas parallélisable.