1.2.2 REMARQUE. $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ est la dérivée au point $t = a_j$ de la $j$eme fonction partielle, c-à-d la fonction d'une variable définie par : $t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n)$.

1.2.3 PROPOSITION

Si f **est différentiable en** a alors :

(1) f a des dérivées suivant tout vecteur $v \in E - \{0\}$ et $D_v f(a) = Df(a)v$. De plus l'application de E dans F, $v \mapsto D_v f(a)$ est linéaire.

(2) Si $E = \mathbb{R}^n$. La différentielle $Df(a)$ est complètement déterminée par les dérivées partielles : et pour tout vecteur $v = \sum_{j=1}^n v_j e_j \in \mathbb{R}^n$,

$$\boxed{Df(a)v = \sum_{j=1}^n v_j D_j f(a) = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)}$$

Démonstration: 1) Soit $v \in E - \{0\}$ donné. La définition de la différentiabilité de f au point a, appliqué au vecteur tv donne :

$$\begin{aligned} f(a+tv) &= f(a) + Df(a)tv + \|tv\|\varepsilon(tv) = f(a) + tDf(a)v + |t|\|v\|\varepsilon(tv) \\ &= f(a) + tDf(a)v + |t|\varepsilon_1(t) \end{aligned}$$

■

où $\varepsilon_1(t) = \|v\|\varepsilon(tv)$

Comme $\varepsilon_1(t) \to 0$ quand $t \to 0$, ceci entraîne que

$$Df(a)v = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} := D_v f(a).$$

Par suite l'application $v \mapsto D_v f(a)$ est linéaire puisque $v \mapsto Df(a)v$ l'est.

2) Dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, $v = \sum_{j=1}^n v_j e_j$, et par linéarité on a :

$$D_v f(a) = Df(a)v = Df(a)\left(\sum_{j=1}^n v_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n v_j Df(a)e_j = \sum_{j=1}^n v_j D_j f(a).$$

1.2.5 REMARQUE. La réciproque est fausse i.e. l'existence des dérivées dans toutes les directions n'entraîne pas toujours la différentiabilité.

1.2.6 EXEMPLE. Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x.y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x.y = 0 \end{cases}$$

admet des dérivées partielles en $(0,0)$, mais n'est pas continue, donc n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Démonstration: En effet, $\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0$, et par passage à la limite, lorsque t tend vers 0, on obtient que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. De même on trouve que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Ainsi f admet des dérivées partielles en $(0,0)$. Elle n'est pas continue en $(0,0)$ car par exemple $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x,x)=\lim\limits_{x\to 0} 1=1\neq 0=f(0,0)$. ■

1.2.8 EXEMPLE. Soient $E=\mathbb{R}^2$ et $F=\mathbb{R}$. L'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

est continue en $(0,0)$, y admet des dérivées suivant tout vecteur, mais n'est pas différentiable.

En particulier, l'existence des dérivées partielles n'implique pas la différentiabilité.

Démonstration: f est continue en $(0,0)$, car $0\leq|f(x,y)|\leq\dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, d'où $\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|=0=f(0,0)$.

D'autre part, on peut écrire : $f(th,tk)=t\dfrac{h|k|}{(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}=tf(h,k)$ ainsi, $\dfrac{f(th,tk)-f(0,0)}{t}=f(h,k)$ et par passage à la limite, lorsque t tend vers 0, f admet des dérivées suivant tout vecteur $v=(h,k)$ et $D_vf(0,0)=f(h,k)$.

En particulier, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=D_{(1,0)}f(0,0)=f(1,0)=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=D_{(0,1)}f(0,0)=f(0,1)=0$.

Maintenant, si on suppose que f est différentiable en $(0,0)$, la proposition précédente nous dit que pour tout $v=(h,k)$, $D_vf(0,0)=h.\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)+k.\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Ce qui est absurde car, $D_{(1,1)}f(0,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$. Donc, f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

1.2.10 Exercice Soit $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par : $h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ est continue, mais n'admet pas de dérivées partielles en $(0,0)$.

1.2.11 Exercice Soit $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{(x^2+y^4)} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1) Montrer que g admet des dérivées suivant tout vecteur en $(0,0)$
2) Montrer que g n'est pas continue en $(0,0)$.
3) Est-elle différentiable en $(0,0)$?

1.3 Remarques sur la notion de fonctions différentiables en dimension infinie

1.3.1 EXEMPLE. Soit K l'espace vecctoriel des suites réelles à support fini i.e. pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$, il existe $N > 0$ tel que $x_n = 0$ pour tout $n \geq N$.

1) $\dim_{\mathbb{R}} K = \infty$.

En effet, si $\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$ et $e_k = (\delta_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$

Alors le système $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est libre et infini.

2) $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ définies par :

$\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ et $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ sont des normes sur K.

Ces normes ne sont pas équivalentes (voir 1.0.7 pour la définition).

En effet, si $(x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ désigne la suite de K telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$x^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ où $x_n^k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} & \text{si } n \leq k-1 \\ 0 & \text{si } n > k-1 \end{cases}$

Alors, $\|x^k\|_1 = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}$ et $\|x^k\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{k}}$, ainsi $\lim_{k\to+\infty} \|x^k\|_1 = +\infty$ et $\lim_{k\to+\infty} \|x^k\|_\infty = 0$, donc elles ne peuvent êtres équivalentes.

3) Soit $L : K \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par :

pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$, $L(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

L est bien définie, car pour tout $x \in K$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$, n'a qu'un nombre fini de terme non nuls.

(a) L n'est pas continue (donc n'est pas différentiable) si on munit K de la norme $\|.\|_\infty$.
En effet, lorsque k tends vers $+\infty$, $\|x^k\|_\infty$ tends vers 0, alors que $L(x^k) = \sqrt{k}$ tend vers $+\infty$.

(b) L est différentiable si on munit K de la norme $\|.\|_1$.
En effet, dans ce cas, on a pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$, $|L(x)| \leq \|x\|_1$.
Soit $a \in K$. Par linéarité on a pour tout $h \in K$, $L(a+h) - L(a) - L(h) = 0$, ainsi pour $h \neq 0$ on aura $\frac{|L(a+h)-L(a)-L(h)|}{\|h\|_1} = 0$, ce qui entraîne,
$\lim_{h\to 0} \frac{|L(a+h)-L(a)-L(h)|}{\|h\|_1} = 0$. D'où L est différentiable en tout point $a \in K$ et $DL(a) = L$.

1.3.2 Exercice Montrer qu'un espace vectoriel normé de dimension infinie admet toujours une forme linéaire non continue.

L'exemple précédent, montre qu'en dimension infinie, contrairement à la dimension finie, les normes ne sont pas toujours équivalentes et les applications linéaires ne sont pas toujours continues. On doit donc en tenir compte dans la définition de fonction différentiable, si on veut que la différentiabilité entraîne la continuité.

le tableau suivant résume les différentes implications rencontrées :

f différentiable en a	$\Rightarrow$	f continue en a	proposition1.1.4
f différentiable en a	$\Rightarrow$	f admet des dérivées en a suivant toutes directions	proposition1.2.3
f continue en a	$\not\Rightarrow$	f différentiable en a	exemple1.2.8
f admet des dérivées en a suivant toutes directions	$\not\Rightarrow$	f différentiable en a	exemple 1.2.8
f admet des dérivées en a suivant toutes directions	$\not\Rightarrow$	f continue en a	exemple 1.2.11
f continue en a	$\not\Rightarrow$	f admet des dérivées partielles en a	exemple 1.2.10

1.4 Un critère de différentiabilité (une condition suffisante)

On a vu que l'existence des dérivées partielles d'une fonction en un point ne garantit pas sa différentiabilité en ce point. Pour s'assurer la différentiabilité, des conditions supplémentaires sont nécessaires. On va montrer qu'il est suffisant d'avoir en plus la continuité des dérivées partielles (sauf peut-être une) .

1.4.1 Théorème

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. On suppose que les dérivées partielles de f existent en a.

Si de plus les dérivées partielles de f sont continues en a, sauf eventuellement une, alors f est différentiable en a.

Démonstration: On munit $\mathbb{R}^n$, de la norme $\|(x_1, \ldots, x_n).\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\}$.

On a par hypothèse : les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ existent et les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ sont continues en a.

On définit l'application $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par :

pour $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $L.h = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

Notre but est de montrer que f est différentiable en a et que $Df(a) = L$ i.e. $\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h)-f(a)-L.h|}{\|h\|_\infty} = 0$.

On pose $a_0 = a$ et pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i = a_{i-1} + h_i e_i$ où e_i est le $i$eme vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$f(a+h) - f(a) = (f(a + h_1 e_1) - f(a)) + \sum_{i=2}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1})) .$$

1.4.3 Lemme (Théorème fondamental de l'analyse)

Si $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dérivable et admet une dérivée g' intégrable alors :

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)\, dt.$$

En appliquant ce lemme, pour $i \in \{2, \dots, n\}$, à $g(t) = f(a_{i-1} + t h_i e_i)$, $a = 0$ et $b = 1$ on aura $g'(t) = h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_{i-1} + t h_i e_i)$ et

$$g(1) - g(0) = f(a_i) - f(a_{i-1}) = f(a_{i-1} + h_i e_i) - f(a_{i-1}) = h_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_{i-1} + t h_i e_i)\, dt.$$

On peut alors écrire :

$$f(a+h) - f(a) - L.h = \left(f(a + h_1 e_1) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 \right) + \sum_{i=2}^{n} h_i \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_{i-1} + t h_i e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right) dt$$

D'où

$$|f(a+h) - f(a) - L.h| \leq \left| f(a + h_1 e_1) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 \right| + \sum_{i=2}^{n} |h_i| \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_{i-1} + t h_i e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| dt$$

En utilisant l'inégalité triangulaire on obtient

$$\frac{|f(a+h) - f(a) - L.h|}{\|h\|_\infty} \leq \frac{\left| f(a + h_1 e_1) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 \right|}{|h_1|} + \sum_{i=2}^{n} \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_{i-1} + t h_i e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| .$$

Comme, pour $i \in \{2, \dots, n\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est continue et $\lim_{h \to 0} a_i = a$ on aura

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_{i-1} + t h_i e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| = 0$$

d'autre part, l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ équivaut à $\lim_{h \to 0} \frac{\left| f(a + h_1 e_1) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 \right|}{|h_1|} = 0$ ainsi, $\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - L.h|}{\|h\|_\infty} = 0$, d'où f est différentiable en a et de différentielle $Df(a) = L$. ■

1.4.4 COROLLAIRE
Soit $f : U \to \mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$.

Si les dérivées partielles de f existent et sont continues en a alors, f est différentiable en a.

1.4.5 EXEMPLE. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{(x^2+y^2)} + y & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

on veut montrer que f est différentiable en $(0,0)$.
On commence par vérifier que les dérivées partielles existent en ce point.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$ d'où $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
2. $\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y} = 1$ d'où $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$.

Maintenant, il suffit de montrer que l'une des dérivées partielles est continue en $(0,0)$. On a pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{-2yx^4}{(x^2+y^2)^2} + 1$. On doit montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$. On a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{-2yx^4}{(x^2+y^2)^2} \right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| 2y \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} \right| \leq 2|y| = 0$.

Ainsi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-2yx^4}{(x^2+y^2)^2} + 1 = 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. ■

1.4.6 REMARQUE. Attention : La différentiabilité n'entraîne pas la continuité des dérivées partielles. Des exemples sont fournis par les exercices suivants.

1.4.7 Exercice La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est différentiable en $(0,0)$, mais $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues en $(0,0)$.

1.4.8 Exercice Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} yx^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est différentiable en $(0,1)$, mais que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,1)$.