Chapitre 1

Applications différentiables

1.0.0 Espace vectoriel normé et applications linéaires

1.0.1 Définition (Espaces vectoriels normés)
Soit E un espace vectoriel (réel). Une *norme* sur E est une fonction réelle

$$N\colon E \to \mathbb{R}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $N(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.
2. $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
3. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (l'inégalité triangulaire)

1.0.2 Définition
Un espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$ est appelé *espace vectoriel normé* (en abrégé **evn**).
Noté $(E, \|\cdot\|)$ ou tout simplement E s'il n'y a pas de risque de confusion.

1.0.3 Remarque. On notera comme d'habitude, la norme d'un élément $x \in E$ par $\|x\|$ plutôt que $N(x)$.

1.0.4 Remarque. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Il est facile à vérifier que la formule $d(x,y) = \|x-y\|$ définit une fonction de distance (métrique) sur E, appelé la fonction de distance induite par la norme, ou associée à la norme.

La norme $\|x\|$ est la distance entre x et zéro : $\|x\| = d(x,0)$.

1.0.5 REMARQUE. L'inégalité triangulaire entraîne $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$ (montrer-le), comme conséquence, la norme $\|.\|: E \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'espace normé E.

La norme sur un espace normé non-trivial $E \neq \{0\}$ n'est jamais bornée. En effet, si $x \in E$, $x \neq 0$, alors $\|x\| \neq 0$, et pour $\lambda \to \infty$ on aura $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \to \infty$ aussi.

1.0.6 EXEMPLE.

1. Le droite $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue $|x|$ est un espace normé réel de dimension 1.

   L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes $z = \Re\mathfrak{e}z + i\Im\mathfrak{m}z$, $\Re\mathfrak{e}z, \Im\mathfrak{m}z \in \mathbb{R}$, est un espace vectoriel réel de dimension 2. Muni de la norme

$$\|z\| = |z| = \sqrt{(\Re\mathfrak{e}z)^2 + (\Im\mathfrak{m}z)^2}$$

   est un espace normé complexe.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sera toujours supposé muni de la base canonique

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$$

   et plus généralement, pour $p \geq 1$,

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

3. Soit (X, d) est un espace métrique compact. $C(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{continue}\}$, est muni de la norme

   $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, est un evn de dimension infinie.

4. L' espace de suites, $\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ x = \{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \mid \xi_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty \right\}$. muni de la norme $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2\right)^{1/2}$, est un evn de dimension infinie.

1.0.7 Définition

On dira que deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sur E sont **équivalentes** s'il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$\forall x \in E, \qquad C_1\|x\| \leq \|x\|' \leq C_2\|x\|$$

1.0.8 Exercice Vérifier l'équivalence entre les normes définies ci-dessus.

Ind. Montrer que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty$.

1.0.9 Théorème

Sur les espaces vectoriels de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (et seuls les espaces vectoriels de dimension finie ont cette propriété).

Démonstration: Si $E = \mathbb{R}^n$ il suffit de montrer que toute norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$ est équivalente à $\|.\|_\infty$.

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors $\|x\| = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\| \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n \|e_i\|$, d'où $\|x\| \leq C_1\|x\|_\infty$ avec $C_1 = \sum_{i=1}^n \|e_i\|$.

Pour montrer l'autre inégalité, on pose $\phi(x) = \|x\|$, d'après l'inégalité triangulaire on $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \|x - y\|$, ainsi $|\phi(x) - \phi(y)| \leq C_1\|x - y\|_\infty$, ce qui entraîne que ϕ est une application continue.

Comme $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = 1\}$ est compact, il existe $C_2 > 0$ tel que $C_2 \leq |\phi(x)|$ pour tout $x \in S$.

Maintenant, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S$, d'où $C_2 \leq \phi\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right)$ c-à-d $C_2\|x\|_\infty \leq \|x\|$, d'où la deuxième inégalité. Pour le cas général en se ramène au cas de $\mathbb{R}^n$ en utilisant 1.0.34 ■

1.0.11 Définition (Boules, voisinages, ouverts, fermés)

Soit $(E, \|\cdot\|$ un espace vectoriel normé.

Soit $a \in E$ et $r > 0$. Une **boule ouverte** $B(a, r)$ de centre a et de rayon r est le sous-ensemble de E défini par $B(a, r) = \{x \in E; \|x - a\| < r\}$.

On appellera simplement ces ensembles des boules.

Une **boule fermée** $\bar{B}(a,r)$ de centre a et de rayon r est le sous-ensemble de E défini par $\bar{B}(a,r) = \{x \in E; \|x-a\| \leq r\}$.

Soit $a \in E$. Un sous-ensemble $V \subset E$ est un **voisinage de** a **dans** E s'il existe $r > 0$ tel que la boule $B(a,r)$ de centre a et de rayon r est contenue dans V.

On notera $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

Un sous-ensemble de E est un **ouvert** de E s'il est voisinage de chacun de ses points.

Un sous-ensemble de E est un **fermé** de E si son complémentaire dans E est un ouvert.

1.0.12 Exercice Montrer que $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > x^2\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leq x^2\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

1.0.13 Exercice Montrer qu'une boule ouverte $B(a,r)$ est un ouvert et qu'une boule fermée $\bar{B}(a,r)$ est un fermé.

1.0.14 EXEMPLE. Dans le cas où $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ avec $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels normé, on peut munir E de la norme :

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \in E, \quad \|x\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i$$

où $\|.\|_i$ est la norme de E_i.

1.0.15 DÉFINITION (CONVERGENCE DANS UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ)
On dit qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs d'un espace vectoriel normé E **converge vers un vecteur** $a \in E$, si la suite de nombres réels $(\|x_k - a\|)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$ i.e. $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_k - a\| = 0$.

Ce qui se traduit en termes de ε, N par :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } k \geq N \Rightarrow \|x_k - a\| \leq \varepsilon$$

1.0.16 PROPOSITION
Dans le cas $E = \mathbb{R}^n$, une suite $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ converge vers un point $a = (a_1, \ldots, a_n)$ si et seulement si $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} x_i^k = a_i$.

Démonstration: Demontrer cette proposition. ■

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **de Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } p, q \geq N \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$$

1.0.18 PROPOSITION
Toute suite convergente est de Cauchy.
La réciproque est fausse en général.

On dit qu'un espace vectoriel normé est **complet** si toute suite de Cauchy converge. Les espaces vectoriels normés complets sont appelés des espaces de **Banach**.

1.0.19 PROPOSITION
Les espaces vectoriels normés de dimension finie sont complets.

1.0.20 DÉFINITION (FONCTIONS CONTINUES)
Soit E et F deux espaces vectoriels normés.
Soit D un sous-ensemble de E. Une fonction $f : D \to F$ définie sur D à valeurs dans F est **continue en** $a \in D$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \text{ tel que } \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon$$

Cette propriété s'exprime aussi en disant que pour chaque boule $B(f(a), \varepsilon)$, il existe une boule $B(a, \eta)$ telle que $f(B(a, \eta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$.
ou encore en utilisant les suites : f est continue en $a \in D$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D convergeant vers a dans E, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$ dans F.
On dit que f est **continue sur** D si f est continue en tout point $a \in D$.
On notera $\mathcal{C}(D; F)$ l'ensemble des fonctions continue de D dans F.

1.0.21 EXEMPLE. Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x.y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x.y = 0 \end{cases}$$

est continue sur le complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ de la réunion des axes de coordonnées.

1.0.22 EXEMPLE. Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$

En effet, comme $0 \leq |f(x,y)| \leq \dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0 = f(0,0)$. Ainsi f est continue en $(0,0)$.

En un point, $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, f est continue, car c'est le quotient deux deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

1.0.23 Exercice Montrer que la somme, le produit et la composition de deux fonctions continues sont continues.

1.0.24 Définition (Graphe)
Soient A et B deux ensembles et $f : A \to B$ une application. Le graphe de f est le sous ensemble de $A \times B$ défini par
$G(f) := \{(x,y), x \in A\}$.

1.0.1 Continuité des applications linéaires

1.0.25 Proposition
Une application linéaire $T : E \to F$ est continue si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

1. T est continue en 0.
2. il existe $K \geq 0$ telle que $\|Tx\|_F \leq K\|x\|_E$, pour tout $x \in E$.

1.0.26 Définition (Applications Linéaires)
L'espace vectoriel des applications linéaires **continues** de E dans F sera noté $\mathcal{L}(E,F)$ ou plus simplement $\mathcal{L}(E)$ si $E = F$.

La valeur d'un élément $T \in \mathcal{L}(E,F)$ en un point $x \in E$ sera notée Tx ou $T(x)$.

On munit $\mathcal{L}(E,F)$ de la *norme d'opérateur* définie par

$$\|T\|_{E,F} := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup\{\|Tx\|_F; \|x\|_E \leq 1\}$$

S'il n'y a pas de confusion possible, on notera simplement $\|T\|$ cette norme.
En particulier, si $F = \mathbb{R}$, l'espace des formes linéaires continues $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, appelé le dual de E., est muni de la norme est définie par : pour $\phi \in E'$
$\|\phi\| = \sup\{\|\phi(x)\|; \|x\| \leq 1\}$.

1.0.27 Exercice Vérifier que la norme du dual $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|.\|_1$ est la norme $\|.\|_\infty$ et réciproquement.

1.0.28 **Proposition**
Si E est de **dimension finie**, alors toute application linéaire T de E dans F est continue.

Démonstration: Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E fixée. Alors $\|T(x)\|_F = \|T(\sum_{i=1}^n x_i e_i)\| = \|\sum_{i=1}^n x_i T(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|T(e_i)\| \leq \|x\|_\infty (\sum_{i=1}^n \|T(e_i)\|)$ d'où il existe $K \geq 0$, telle que $\|T(x)\|_F \leq K\|x\|$ pour tout $x \in E$. ■

1.0.30 **Proposition**
Si $\dim E = \dim F$ est **finie**, une application linéaire T de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective si et seulement si elle est surjective.

Démonstration: C'est une conséquence de la relation suivante (théorème du rang) :

$$\dim(E) = \dim(T(E)) + \dim(\ker(T))$$

1.0.32 **Définition**

1. On dira qu'une application linéaire de E dans F est un **isomorphisme** si cette application est continue, bijective et son inverse est continue.
2. Une application $\Phi\colon E \to F$ est une **isométrie** si pour tout $x, y \in E$ on a $\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_F = \|x - y\|_E$.

1.0.33 Exercice Montrer qu'une isométrie est injective et continue.

3. On dit que $\Phi\colon E \to F$ est un isomorphisme isométrique si c'est à la fois une isomorphisme et un isométrie.

1.0.34 **Théorème**
Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors il existe un isomorphisme isométrique de $\mathbb{R}^n$ sur E. Plus précisement, soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E fixée. On définit sur E une norme en posant, pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$,
$\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$. On définit une application linéaire $\Phi : \mathbb{R}^n \to E$, par $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Alors Φ est un isomorphisme isométrique, on peut ainsi identifier tout espace vectoriel normé de dimension n à $\mathbb{R}^n$ via cet isomorphisme.

Démonstration: Φ est linéaire et $\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i - \sum_{i=1}^n y_i e_i\|_\infty = \|\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) e_i\|_\infty = \sup\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\} = \|x - y\|_\infty$, d'où Φ est une isométrie. Par suite, Φ est injective, donc bijective puisque $\dim E = \dim \mathbb{R}^n = n$. On remarquera que son inverse Φ^{-1} est aussi une isométrie.

1.0.36 DÉFINITION

Une application *affine* $A : E \to F$ est définie par un vecteur $b \in F$ et une application linéaire $T : E \to F$ telle que

$$\forall x \in E, \quad Ax = b + Tx.$$

1.0.37 DÉFINITION (REPRÉSENTATION MATRICIELLE EN DIMENSION FINIE)

Soient $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$. Les coordonnées des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique sont représentés par des matrices $n \times 1$ appelées matrices colonne.

Une application linéaire $T : E \to F$ est représentée dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ par une matrice $p \times n$, à p lignes et n colonnes. Les vecteurs colonnes de A sont les coordonées des images par T, des vecteurs de la base initiale, exprimés dans la base de l'espace d'arrivé.

En particulier, une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ est représentée par des matrices $1 \times n$, c-à-d des matrices lignes.

En identifiant les matrices lignes et les matrices colonnes à n éléments, ceci nous permet d'identifier algébriquement le dual de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des formes linéaires $(\mathbb{R}^n)' = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^n$.

Tout espace vectoriel E de dimension n muni d'une base s'identifie à $\mathbb{R}^n$, par l'intermédiaire des coordonnées des vecteurs de E sur la base. La représentation matricielle ci-dessus restent donc valable dans ce cadre.

Par contre, en tant qu'espace normé, le dual de $\mathbb{R}^n$ ne s'identifie à lui-même que s'il est muni de la norme euclidienne i.e. issue d'un produit scalaire.

1.1 Applications différentiables

Dans ce chapitre on va considérer la notion d'applications différentiables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et plus généralement la différentiablité des applications entre espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Pour une fonction d'une variable réelle $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a \in I$, on dit que f est dérivable en a si la limite lorsque $x \in I \setminus \{a\}$ tends vers a du rapport $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe, on note $f'(a)$ cette limite.

De façon équivalente, f est dérivable en a, s'il existe un nombre réel, noté $f'(a)$, tel que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = 0$ ou de même

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)|}{|x-a|} = 0.$$

Ceci revient à dire qu'il existe un réel $f'(a)$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ qui tends vers 0 lorsque x tends vers a tels que pour tout $x \in I$:

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + |x-a|\varepsilon(x-a).$$

Que on peut aussi réecrire, en posant $h = x - a$: il existe un réel $f'(a)$ et une fonction $\varepsilon : I - a \to \mathbb{R}$, qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0 tels que pour tout $h \in I - a$:

$$f(a+h) - f(a) = f'(a).h + |h|\varepsilon(h).$$

1.1.1 Remarque

Ceci nous dit que f est dérivable en a si elle admet un developpement limité à l'ordre 1 au voisinage de a.

On n'a pas en général la même relation entre l'existence des dérivées d'ordre $k \geq 2$ et le developpement limité à l'ordre k. (donner un contre-exemple)

Pour généraliser cette notion aux applications entre **espaces vectoriels normés de dimension (**≥ 2**)** on pose :

1.1.2 Définition

Soit une application $f : U \to F$ où U est un ouvert de E.

On dit que f est **différentiable en** $a \in U$

s'il existe une application linéaire **continue** $L : E \to F$, une fonction ε définie dans un voisinage V de 0 à valeurs dans F telle que : $\forall h \in V$ et $a + h \in U$,

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + L.h + \|h\|.\varepsilon(h)} \tag{1.1}$$

et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ dans F.

ou de façon équivalente : s'il existe une application linéaire **continue** de $L : E \to F$, telle que

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L.h\|_F}{\|h\|_E} = 0} \tag{1.2}$$

1.1.3 Remarque. Si f est différentiable en $a \in E$, elle est aussi différentiable en $a \in E$ si on remplace les normes de E et F par des normes équivalentes.

En particulier, si E et F sont de dimension finie, la notion de différentiabilité ne dépend des normes, puisque dans ce cas toutes les normes sont équivalentes.

1.1.4 Proposition

Il existe un unique application linéaire continue $L : E \to F$ vérifiant 1.1 ou 1.2

Démonstration: Soient L_1 et L_2 deux applications linéaires continues de $E \to F$ vérifiant 1.2 alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|L_1.h - L_2.h\|}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{\|(f(a+h) - f(a) - L_1.h) - (f(a+h) - f(a) - L_2.h)\|}{\|h\|}$$

$$\leq \lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-L_1.h\|}{\|h\|} + \lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-L_2.h\|}{\|h\|} = 0$$

Maintenant, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ et $t \in \mathbb{R}^*$ on a $\frac{\|L_1.x-L_2.x\|}{\|x\|} = \frac{\|L_1.tx-L_2.tx\|}{\|tx\|}$ par suite $\|L_1.x - L_2.x\| = \|x\|.\lim_{t\to 0} \frac{\|L_1.tx-L_2.tx\|}{\|tx\|} = 0$, ainsi $L_1x = L_2x$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ c-à-d $L_1 = L_2$.■

1.1.6 Définition

1) Si f est différentiable en a, l'application linéaire continue $L : E \to F$, vérifiant 1.1 (ou 1.2) est appelée la différentielle de f en a et est notée $Df(a)$.
2) L'application affine de E dans F, $x \mapsto f(a) + Df(a)(x-a)$ est appelé l'application **affine tangente à** f **en** a.
3) Soit U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application.
On dit que f est **différentiable sur** U si elle est différentiable en tout point de U.
On dit que f est de **classe** C^1 **(** ou **continûment différentiable) sur** U si elle est différentiable en tout point de U et si l'application :
$Df : U \to \mathcal{L}(E;F), \quad x \mapsto Df(x)$ est continue.

1.1.7 Proposition

Une application différentiable en un point est continue en ce point.

Démonstration: Comme $h \mapsto Df(a)h$ est linéaire et continue et $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ on aura

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) = \lim_{h\to 0} Df(a)h + \lim_{h\to 0} \|h\|\varepsilon(h) = 0$$

D'où la continuité de f en a.■

1.1.9 Exemple. Une application réelle définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ est différentiable en a si elle est dérivable en a et sa différentielle est l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ représenter par la multiplication par le réel $f'(a)$, i.e. l'application $x \mapsto f'(a).x$

1.1.10 Exemple. 1) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy$ est différentiable en tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et sa dérivée en (x_0, y_0) est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$Df(x_0,y_0)(h_1,h_2) = y_0h_1 + x_0h_2 = (y_0, x_0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

2) Soient $E = F = \mathbb{R}^2$.
L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x + y, xy)$ est différentiable en tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et sa différentielle en un point (x_0, y_0) est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$Df(x_0, y_0)(h_1, h_2) = (h_1 + h_2, y_0 h_1 + x_0 h_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Démonstration: 1) En effet, on peut écrire, pour $a = (x_0, y_0)$ et $h = (h_1, h_2)$:

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) \\ &= (x_0 + h_1)(y_0 + h_2) - x_0 y_0 = (y_0 h_1 + x_0 h_2) + h_1 h_2 \\ &= (y_0 h_1 + x_0 h_2) + \|h\|_2 . \varepsilon(h) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(h) = \dfrac{h_1 h_2}{\|(h_1, h_2)\|_2}$
Comme, $|h_1 h_2| \leq \frac{1}{2}(|h_1|^2 + |h_2|^2) = \frac{1}{2}\|(h_1, h_2)\|_2^2$,
on a bien $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

2) De la même façon, on écrit :

$$f(a+h) - f(a) = ((x_0 + h_1) + (y_0 + h_2), (x_0 + h_1)(y_0 + h_2)) - (x_0 + y_0, x_0 y_0)$$

$$= (h_1 + h_2, y_0 h_1 + x_0 h_2) - (0, h_1 h_2) = (h_1 + h_2, y_0 h_1 + x_0 h_2) + \|h\|_2 . \varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon(h) = (0, \dfrac{h_1 h_2}{\|(h_1, h_2)\|_2})$
Comme $\|(0, h_1 h_2)\|_2 \leq \frac{1}{2}(|h_1|^2 + |h_2|^2) = \frac{1}{2}\|(h_1, h_2)\|_2^2$,
on a bien $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

1.2 Dérivées directionnelles et dérivées partielles

1.2.1 Définition

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, $a \in E$ et V un voisinage de a dans E.

Soit $f : V \to F$ une application. Pour $a \in E$ et $v \in E - \{0\}$, le vecteur de F défini par $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + th) - f(a)}{t}$, quand il existe, est appelé **dérivée directionnelle de f en a suivant le vecteur v** (ou dérivée directionnelle de f en a dans la direction v) et noté $D_v f(a)$.

En particulier : si v est le vecteur e_j de la base canonique de $\mathbb{R}^n$

$$D_{e_j} f(a) := D_j f(a)$$

est appelé **la j-eme dérivée partielle de f en a**. Notée aussi $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.