Université de Rennes 1
Département de Mathématiques 2011-2012

Licence de Mathématiques
”Calcul Différentiel et Fonctions Holomorphes"
Feuille de TD n^{0}1

1. Applications différentiables

Exercice 1.1.

i) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Calculer $Df(x)$ et $f'(x)$.

ii) Calculer $Df(a)$, pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin x$ et $a \in \mathbb{R}$.

iii) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x)\| \leq M\|x\|^2$. Montrer que f est différentiable en $x = 0$ et que $Df(0) = 0$.

Exercice 1.2.

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$.
   Montrer que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la dérivée de f en a dans la direction u i.e. $D_u f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(f(a + tu) - f(a)\big)$, existe et l'exprimer à l'aide de $Df(a)$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x})$.
   Montrer que $D_v f(1, 0) = v$, pour tout $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

3. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$ et, si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}$. Montrer que f est dérivable en $(0, 0)$ dans toutes les directions, mais que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 1.3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

et $f(0, 0) = 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, et que pour tout
$u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $D_u f(0, 0)$ existe, mais que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 1.4. Soit $\alpha > 0$. Étudier, en fonction de α, la continuité puis la différientiabilité à l'origine de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et

$$f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) .$$

Exercice 1.5. Soit E l'espace des polynômes de degré $\leq n$. Etudier la différentiabilité des applications $P \mapsto \int_0^1 (P^3(t) - P^2(t))\, dt$ et $P \mapsto P' - P^2$.

Exercice 1.6. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \backslash \{a\} \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = \frac{a-x}{||x-a||^2}$.

1. Calculer $Df(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{a\}$.
2. Montrer que $Df(x).h = \frac{Sh}{||x-a||^2}$ où S est la symétrie orthogonale d'axe $x - a$.

Exercice 1.7. Soit f une application de E dans F espaces vectoriels normés de dimension finie.

On rappelle les implications suivantes : pour $x_0 \in E$,
"f de classe C^1 en x_0" $\Rightarrow$ "f différentiable en x_0" $\Rightarrow$ "f continue en x_0".
De même que "f différentiable en x_0" $\Rightarrow$ "f admet des dérivées partielles en x_0."
Montrer que les réciproques sont fausses en général en étudiant :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } y = 0 \\ y^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en } (0,0) \end{cases} \quad \text{et } g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 1.8. Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, où E, F, G sont des evn de dimension finie.

1. Calculer $DB(a,b)$, sa différentielle en un point (a,b) de $E \times F$.
2. En déduire, pour f et g deux applications différentiables de I intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, la différentielle des l'applications:
   (a) $I \to \mathbb{R}^3$ définie par $t \mapsto f(t) \wedge g(t)$.
   (b) $I \to \mathbb{R}$ définie par $t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$.
3. Application : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax \perp x$.
   Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tA} est une isométrie c-à-d pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|e^{tA}x\| = \|x\|$.
   (Ind: Dériver l'application $t \mapsto ||e^{tA}x||^2$.)

Exercice 1.9. On suppose $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne. Soit F un sous-espace vectoriel et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = d(x, F)$.

1. Montrer que pour chaque x il existe $y \in F$ tel que $f(x) = \|x - y\|$.

   Montrer que f est 1-lipschitzienne

2. On suppose que f est différentiable en $x \notin F$.
   Montrer que $\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} \leq 1$.

3. Soit $\varphi :\in [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, la fonction définie par $t \mapsto f((1 - t)x + ty)$; en calculant $\varphi'(0)$ de deux façons, montrer que: $Df(x).\frac{x-y}{\|x-y\|} = 1$ et $\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} = 1$.

4. En déduire que y est unique.

Exercice 1.10. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = \dfrac{g(x) - g(y)}{x - y}$ si $x \neq y$, $\;F(x, x) = g'(x)$. Montrer que F est de classe C^1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et calculer sa différentielle.

Exercice 1.11.

1. Soit $f : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application qui associe à une matrice A son déterminant $f(A) = \det(A)$. Montrer qu'elle est différentiable et déterminer Df.

2. Pour $n \geq 1$, on considère l'application $\varphi_n(A) = A^n$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer qu'elle est différentiable en toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

3. On désigne par $GL_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que $GL_p(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et calculer la différentielle de l'application $A \mapsto A^{-1}$ de $GL_p(\mathbb{R})$ dans $GL_p(\mathbb{R})$.

Exercice 1.12. Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ et de la norme associée $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$. Soit u un endomorphisme continu de $\mathcal{E}$ que l'on suppose symétrique, i.e.

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle \quad \text{pour tout } \; x, y \in \mathcal{E} \; .$$

1. Montrer que l'application $x \in \mathcal{E} \mapsto \langle u(x), x\rangle$ est différentiable sur $\mathcal{E}$ et calculer sa différentielle. L'application $x \mapsto \|x\|^2$ est donc différentiable.

2. On définit une application $\varphi : \mathcal{E} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ en posant $\varphi(x) = \frac{\langle u(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle}$. Établir qu'il s'agit d'une application différentiable. Calculer ensuite $D\varphi$. Montrer que, pour un élément non nul $a \in \mathcal{E}$, on a $D\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est vecteur propre de u.