Chapitre 2

Rappels d'intégration

2.0.14 DÉFINITION
Une algèbre (ou clan) sur un ensemble X est un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathscr{P}(X)$ tel que :

1. $X \in \mathcal{A}$.
2. $A \in \mathcal{A}$ entraîne $X \setminus A = A^{\complement} \in \mathcal{A}$. (stable par passage au complémentaire)
3. Si $A, B \in \mathcal{A}$ alors , $A \cup B \in \mathcal{A}$.
   (stable par réunion finie)

2.0.15 DÉFINITION
Une σ-algèbre (ou tribu) sur un ensemble X est un sous-ensemble Σ de $\mathscr{P}(X)$ tel que :

1. $X \in \Sigma$.
2. $A \in \Sigma$ entraîne $X \setminus A = A^{\complement} \in \Sigma$. (stable par passage au complémentaire)
3. Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite (dénombrable) dans Σ, alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \Sigma$. (stable par réunion dénombrable)

2.0.16 REMARQUE
$\emptyset \in \Sigma$ et Σ est stable par intersection dénombrable.

2.0.17 LEMME
1) Soit $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ une famille de σ-algèbres. Alors $\bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} \Sigma_\alpha$ est aussi une σ-algèbre.

2) Soit $S \subset \mathscr{P}(X)$, alors il existe une unique plus petite σ-algèbre contenant S, notée $\Sigma(S)$, elle est égale à l'intersection de toutes les σ-algèbres sur X contenant S.

2.0.18 DÉFINITION
La σ-algèbre $\Sigma(S)$ est appelée la σ-algèbre engendrée par S.

2.0.19 EXEMPLE. Soit (X, τ) est un espace topologique.
La σ-algèbre borélienne est la σ-algèbre engendrée par tous les ouverts de X i.e. c'est la σ-algèbre $\Sigma(\tau)$.

Un espace X muni d'une σ-algèbre Σ est appelé espace mesurable, et tout élément de Σ est appelé ensemble mesurable dans X. On notera (X, Σ) l'espace mesurable.

2.0.20 EXEMPLE. Si Y est un espace toplogique et τ est famille d'ouverts, alors, $(Y, \Sigma(\tau))$ est un espace mesurable. Dans la suite, un espace topologique sera considéré muni de sa σ-algèbre borélienne.

2.0.1 Mesures

Soit Σ une algèbre (ou σ-algèbre) sur X. Une **mesure** (positive) sur (X, Σ) est une application $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ telle que :

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. pour toute suite $\{A_n\}$ d'élément de $\mathcal{A}$, telle que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ et $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour $n \neq m$ on a : $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (σ-additivité)

On dit que la mesure est **finie** si $\mu(X) < +\infty$.
On dit que la mesure est **σ-finie** si X admet un recouvrement $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ avec $\mu(X_n) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$.

Propriétés de la mesure :

1. $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.
2. Si $A_n \subset A_{n+1}$ alors $\lim_n \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$.
3. Si $A_{n+1} \subset A_n$ et $\mu(A_1) < +\infty$ alors $\lim_n \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$.

Démonstration:
1. On écrit $B = A \cup (B \setminus A)$ alors $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.
2. On pose $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ alors $\lim_n \mu(A_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$.
3. On pose $C_n = A_1 \setminus A_n$, $\mu(C_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$ alors la suite est croissante et $\mu(A_1) - \lim_n \mu(A_n) = \lim_n \mu(C_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} C_n) = \mu(A_1) - \mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)$. ■

2.0.22 EXEMPLE. 1. Soit X un ensemble. La mesure de comptage est la mesure définie sur $\mathcal{P}(X)$ par $A \in \mathcal{P}(X) : \mu(A) = \begin{cases} \sharp A \text{ si } A \text{ est fini} \\ +\infty \text{ si } A \text{ est infini} \end{cases}$

où $\sharp A$ est le cardinal de A.

Si $X = \mathbb{N}$ et $A_n = \{k \in \mathbb{N} | j \geq n\}$ alors $\mu(A_n) = +\infty$ et $A_{n+1} \subset A_n$. Mais $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\emptyset) = 0 \neq \lim_n \mu(A_n)$, d'où la nécessité de l'hypothèse $\mu(A_1) + \infty$ dans la proposition précédente.

2. Mesure de Dirac :

Soit X un ensemble (non vide) et $a \in X$ un point fixé.

On définit $\delta_a : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ par : $\delta_a(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \text{ si } a \notin A \end{cases}$

On vérifie que δ_a est une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$, que l'on appelle mesure de Dirac.

2.0.23 Exercice Soit Σ une algèbre (ou σ-algèbre) sur X et $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ une application. Montrer que μ est une mesure si et seulement si

1. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.
2. Si $\{A_n\}$ est une suite décroissante telle que $\mu(A_1) < +\infty$ et $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ alors $\lim_n \mu(A_n) = 0$ (propriété de Carathéodory)

On a le théorème fondamental suivant :

2.0.24 THÉORÈME (THÉORÈME D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DE CARATHÉODORY) Toute mesure (positive) m définie sur une algèbre $\mathcal{A}$ d'un ensemble X se prolonge en une mesure (positive) μ sur la σ-algèbre $\Sigma = \Sigma(\mathcal{A})$ engendrée par $\mathcal{A}$.

Si de plus, la mesure m est σ-finie (resp. finie), alors ce prolongement est unique et μ est σ-finie (resp. finie).

Applications :

la mesure de Lebesgue

Pour $a < b$, on note (a, b) pour l'un des intervalles ouvert, fermé ou semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.

Un pavé de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ où pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ et $a_i < b_i$. Son volume usuel est donné par $\lambda\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)\right) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ (ce volume est égal à $+\infty$ si l'un des a_i ou b_i est infini.)

On étend λ par additivité finie aux réunions finies de pavés disjoints, i.e. si $P_1, \ldots, P_N$ sont des pavés disjoints alors $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{N} P_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \lambda(P_i)$

On désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble des réunions finies de pavés deux à deux disjoints de $\mathbb{R}^n$. Tout éléments de $A \in \mathcal{A}$ s'écrit de manière unique sous la forme $A = \cup_{i=1}^{l} P_i$ où les P_i sont des paves deux à deux disjoints, l'on peut alors définir sans ambiguïté la mesure de A par $\lambda(A) = \sum_{i=1}^{l} \lambda(P_i)$.

2.0.25 Proposition

$\mathcal{A}$ est une algèbre et λ est une mesure σ-finie sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$.

Démonstration: Puisque, $\mathbb{R}^n = \bigcup_{r \in \mathbb{Z}^n} \tau_r([0,1[^n)$ où τ_r est la translation de vecteur r i.e. $\tau_r(x) = x + r$ et que $\lambda\left(\tau_r([0,1[^n)\right) = \lambda\left([0,1[^n\right) = 1$, on en déduit que λ est σ-finie.

On vérifie que $\mathcal{A}$ est une algèbre et pour tout $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$ on a $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$.

Il reste à montrer la propriété de Carathéodory de l'exercice2.0.23 est satisfaite. Soit $\{A_k\}$ est une suite décroissante telle que $\lambda(A_1) < +\infty$ et $\cap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$. On doit montrer que $\lim_{k \to +\infty} \lambda(A_k) = 0$.

Soit $\epsilon > 0$. Dans chaque A_k, on choisit un compact K_k, réunion finie de pavés fermés, tel que $\lambda(A_k \setminus K_k) \leq \frac{\epsilon}{2^k}$. On pose $C_1 = K_1, C_2 = K_2 \cap C_1, \ldots C_k = K_k \cap C_{k-1}$, ainsi de suite, par récurrence on construit une suite décroissante de compacts $C_k \in \mathcal{A}$ et $C_k \subset A_k$.

Alors, $\cap_{k=1}^{\infty} C_k \subset \cap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$, et par compacité il existe un k_0 tel que $C_{k_0} = \emptyset$.

D'autre part $K_k \setminus C_k = K_k \setminus (K_k \cap C_{k-1}) \subset A_k \setminus C_{k-1} \subset A_{k-1} \setminus C_{k-1}$. On a donc $\lambda(A_k \setminus C_k) = \lambda(A_k \setminus K_k) + \lambda(K_k \setminus C_k) \leq \frac{\epsilon}{2^k} + \lambda(A_{k-1} \setminus C_{k-1})$.

On trouve alors par récurrence que $\lambda(A_k \setminus C_k) \leq \frac{\epsilon}{2^k} + \frac{\epsilon}{2^{k-1}} + \ldots + \frac{\epsilon}{2}$, d'où pour tout k, $\lambda(A_k \setminus C_k) \leq \epsilon$. En particulier si $k \geq k_0$, on a $\lambda(A_k) \leq \epsilon$. En conclusion, pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $k \geq N$, $\lambda(A_k) \leq \epsilon$. ∎

Comme la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ est égale à la σ-algèbre des Boréliens de $\mathbb{R}^n$, le théorème de Carathéodory permet d'obtenir.

2.0.27 Théorème

Il existe une unique mesure définie sur la σ-algèbre des boréliens de $\mathbb{R}^n$, qui à tout pavé associe son volume usuel. Cette mesure est appelée **la mesure de Lebesgue sur** $\mathbb{R}^n$ et notée λ. Elle est invariante par translation et finie sur les sous-ensembles compacts.

2.0.28 Exercice

1. Montrer que tout compact est un borélien.
2. Montrer que la la mesure de Lebesgue ne charge pas les points i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $\lambda(x) = 0$.

3. Montrer que la la mesure de Lebesgue est invariante par translation : pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$: $\lambda(a+B) = \lambda(B)$.
4. Montrer que la la mesure de Lebesgue est invariante par symétrie : pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^n$ $\lambda(-B) = \lambda(B)$.

2.0.29 DÉFINITION

Une mesure μ sur la σ-algèbre borélienne est une **mesure borélienne** si pour tout compact K, $\mu(K) < +\infty$.

Une mesure borélienne est dite régulière si pour tout ensemble mesurable A on a :

$$\begin{cases} \mu(A) & = \inf\{\mu(O) \,|A \subset O,\, O \text{ ensemble ouvert }\} \\ & = \sup\{\mu(K) \,|K \subset A,\, K \text{ ensemble compact }\} \end{cases}$$

2.0.30 Exercice Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est une mesure borélienne régulière.

2.0.31 DÉFINITION

Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit **négligeable** s'il est contenu dans un ensemble de mesure nulle. i.e. il existe $B \in \Sigma$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

Une propriété dépendant de x de X est dite vérifiée **presque partout** si elle l'est pour x appartenant au complémentaire d'un ensemble négligeable.

Ainsi, on dira que deux fonctions f et g sont égales presque partout si l'ensemble des x tels que $f(x) \neq g(x)$ est un ensemble négligeable ; une suite de fonction f_n converge presque partout vers une fonction f s'il existe un ensemble négligeable Y tel que $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \notin Y$.

On écrira souvent p.p. à la place de presque partout.

2.0.32 REMARQUE

La réunion dénombrables d'ensembles négligeables est négligeable.

2.0.33 PROPOSITION

Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré. Un ensemble $A \subset X$ est négligeable si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables telle que $A \subset \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ et $\mu\left(\cup_{k=1}^{\infty} A_k\right) < \epsilon$.

Démonstration: Exercice ∎

Exemples :

(1) Tout hyperplan de $\mathbb{R}^n$, plus généralement toute variété affine de dimension $p \leq n-1$, est négligeable.

(2) $\mathbb{Q}$ est de mesure nulle par rapport à la mesure de Lebesgue, car le mesure d'un singleton est nulle et la réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est un ensemble de mesure nulle. Plus généralement tout ensemble dénombrables est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue.
Il existe des ensembles de mesure nulle et non dénombrables, en effet

(3) **L'ensemble triadique de Cantor** C : est construit par récurrence comme suit : $C_0 = [0,1]$, $C_1 = [1, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $C_2 = [1, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ etc... i.e.

$$C_{n+1} = \left(\frac{1}{3}C_n\right) \cup \left(\frac{1}{3}(C_n+2)\right) \text{ et } C = \bigcap_n C_n$$

La suite C_n est décroissante et chaque C_n est constitué de 2^n intervalles de longueur (chacun) $\frac{1}{3^n}$ d'où $\lambda(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Ainsi $\lambda(C) = \lim_n \lambda(C_n) = \lim_n \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.
D'autre part, C est égale à $\left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n} \mid a_n \in \{0,2\} \right\}$, il est donc en bijection avec $\{0,2\}^{\mathbb{N}^*}$ qui est équipotent à $\mathbb{R}$, C n'est donc pas dénombrable.

(4) **Un exemple d'ensemble non mesurable** :
On considère sur $[0,1[$ la relation d'équivalence $\sim$ définie par : $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Q}$. On construit, à l'aide de l'axiome du choix, un ensemble V, en prenant un seul représentant par classe d'équivalence. L'ensemble V n'est pas mesurable.
Supposons que V soit mesurable :
On remarquera que $[0,1[\subset V + \mathbb{Q} \cap [0,1[= \cup_{r_n \in \mathbb{Q}\cap[0,1[} V + r_n \subset [0,2[$.
1er cas : $\mu(V) = 0$ alors
$1 = \mu([0,1[) \leq \mu(V + \mathbb{Q} \cap [0,1[) = \sum_{r_n \in \mathbb{Q}\cap[0,1[} \mu(V + r_n) = \sum_{r_n \in \mathbb{Q}\cap[0,1[} \mu(V) = 0.$
2eme cas : $\mu(V) = \epsilon > 0$ alors
$\mu(V + \mathbb{Q} \cap [0,1[) = \sum_{r_n \in \mathbb{Q}\cap[0,1[} \mu(V) = \sum_{r_n \in \mathbb{Q}\cap[0,1[} \epsilon = +\infty \leq \mu([0,2[) = 2.$
Dans les deux cas on obtient une absurdité, donc l'ensemble V n'est pas mesurable.

2.0.2 Fonctions mesurables

Dans, l'intégrale de Riemann, on décompose l'axe des x en petits intervalles et on approche la fonction dans chaque intervalle par son minimum et son maximum.

Le problème avec cette approche est que la différence entre le minimum et le maximum va tendre vers 0, lorsque la longueur de l'intervalle tend vers 0, seulement si la fonction est "suffisamment régulière" (par exemple uniformément continue).

Pour éviter ce problème, on pourrait forcer la différence à tendre vers 0, en considérant à la place des d'intervalles, des ensembles de la forme $\{x \mid a \leq f(x) \leq b\}$ i.e. $f^{-1}([a,b])$.

Mais pour que ceci puisse être utilisé il faudrait que ces ensembles soient mesurables. Ceci nous conduit à la définition suivante :

2.0.35 DÉFINITION

Soit (X, Σ) est un espace mesurable et Y un espace topologique. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est une fonction mesurable si pour tout ouvert O dans Y, $f^{-1}(O)$ est un sous-ensemble mesurable dans X i.e. $f^{-1}(O) \in \Sigma$.

Une fonction à valeurs complexe est mesurable si ses paries réelles et imaginaire sont des fonctions mesurables.

2.0.36 REMARQUE

Il suffit de vérifier cette conditions sur les générateurs de la σ-algèbre.

Par exemple dans le cas de la σ-algèbre borélienne $\mathcal{B}^n$ sur $\mathbb{R}^n$, pour montrer qu'une fonction est mesurable, il suffit, de vérifier la condition pour les pavés du type $\prod_{i=1}^n]a_i, +\infty[$.

En particulier, une fonction $f : X \to \mathbb{R}^n$ est mesurable si et seulement si ses composantes f_i, $1 \leq i \leq n$, sont des fonctions mesurables.

2.0.37 DÉFINITION

Si Σ est une σ-algèbre borélienne, on dit qu'une fonction mesurable est une fonction borélienne, dans ce cas on a :

2.0.38 THÉORÈME

Soit $g : Y \longrightarrow Z$ une fonction continue entre espaces topologiques. Si (X, Σ) est un espace mesurable et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction mesurable, alors $h = g \circ f$ est une fonction mesurable.

2.0.39 LEMME

Toutes fonctions continue est mesurable, la composée de fonctions mesurables est mesurable.

Démonstration: On doit utiliser que $f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ et que $f^{-1}(\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$. ■

Il est parfois utile de permettre à f de prendre des valeurs ∞ i.e. $f : X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$). Dans ce cas un ensemble $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ est borélien si et seulement si $A \cap \mathbb{R}$ l'est.

2.0.41 PROPOSITION

L'ensemble des fonctions mesurables est une algèbre. En particulier, la somme et le produit de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont des fonctions mesurables.

Démonstration: Il suffit, de remarquer que l'addition et la multiplication sont des fonctions continues de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. ∎

2.0.43 PROPOSITION
Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables alors : $\inf f_n$, $\sup f_n$, $\liminf f_n$ et $\limsup f_n$ sont des fonctions mesurables.

Démonstration: Il suffit de montrer que $\sup f_n$ est mesurable et le reste suit, car $\inf f_n = -\sup(-f_n)$, $\liminf f_n = \sup\limits_n \inf\limits_{k\geq n} f_k$ et $\limsup f_n = \inf\limits_n \sup\limits_{k\geq n} f_k$.

Comme, $(\sup f_n)^{-1}(]a, +\infty[) = \bigcup\limits_n f^{-1}(]a, +\infty[$ est mesurable (réunion dénombrable d'ensembles mesurables), il s'en suit que $\sup f_n$ est une fonction mesurable. ∎

2.0.45 COROLLAIRE
Si f et g sont mesurables alors, $\min(f, g), \max(f, g), |f| = \max(f, -f), f^+ = \max(f, 0)$ $f^- = \max(-f, 0) = -\inf(f, 0)$ et $|f| = f^+ + f^-$ sont des fonctions mesurables.

2.0.46 EXEMPLE. Soit f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur un espace mesurable X. Montrer que

$$E = \{x \in X \,:\, \sin f(x) \geq \cos g(x)\}$$

est un sous-ensemble mesurable de X.

Solution: Soit $h = \sin \circ f - \cos \circ g$. Par continuité de sin et cos, et la h est mesurable. De plus, $E = h^{-1}(-\infty, 0)^{\complement}$, et $(-\infty, 0)$ sont des ouverts. alors l'image réciproque de $(-\infty, 0)$ par h est mesurable, et sont complémentaire est aussi mesurable. ∎

2.0.3 Intégration de Lebesgue

On va maintenant définir l'intégrale d'une fonction mesurable, on commence par les fonctions simples.

Une fonction mesurable $S : X \to \mathbb{R}$ est une fonction simple (ou étagée) si son image $S(X)$ est finie i.e. il existe $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ tels que $S = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ où $A_i = S^{-1}(\{\alpha_i\})$.
On rappelle que $\mathbb{1}_A$ est la fonction indicatrice de A et est définie par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

La fonction indicatrice de A est parfois appelée fonction caractéristique et notée dans ce cas par χ_A.

Pour une fonction simple positive $S : X \to \mathbb{R}^+$, on définit son intégrale sur un sous-ensemble mesurable A par :

$$\int_A S\,d\mu = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\,\mu(A_i \cap A)$$

(on utilise la convention $0.\infty = 0$.)

2.0.48 PROPOSITION

1. $\int_A S\,d\mu = \int_X \mathbb{1}_A S\,d\mu$
2. Si $\{A_i\}_{i\geq 1}$ est une famille d'ensembles mesurables, deux à deux disjoints, alors
$$\int_{\cup_{i=1}^{\infty} A_i} S\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} S\,d\mu.$$
3. Si S et T sont deux fonctions simples, a et b deux réels alors
$$\int_A aS + bT\,d\mu = a\int_A S\,d\mu + b\int_A T\,d\mu.$$
4. Si $A \subset B$ alors $\int_A S\,d\mu \leq \int_B S\,d\mu$.
5. Si $S \leq T$ alors $\int_A S\,d\mu \leq \int_A T\,d\mu$.

Démonstration:
1. Clair d'après la définition de l'intégrale
2. Conséquence de la σ-additivité de la mesure.
3. si $S = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $T = \sum_{j=1}^{q} \beta_i \mathbb{1}_{B_j}$ $C_{ij} = A_i \cup B_j$ alors
$\int_A \alpha S + \beta T\,d\mu = \sum_{ij} \int_{C_{ij}} aS + bT\,d\mu = \sum_{ij} (a\alpha_i + b\beta_j)\,\mu(C_{ij})$
$= \sum_{ij} a \int_{C_{ij}} S\,d\mu + b\int_{C_{ij}} T\,d\mu = a\int_A S\,d\mu + b\int_A T\,d\mu.$
4. propriété de la monotonie de la mesure
5. $t - s \geq 0$ et on utilise 4. ∎

On va étendre la notion d'intégrale à toute fonction mesurable positive $f : X \to [0, +\infty]$ par :

$$\int_A f\,d\mu = \sup\left\{\int_A S\,d\mu \middle|\, S \text{ est une fonction simple et } 0 \leq S \leq f\right\}.$$

pour $A \in \Sigma$ On remarquera que les résultats de la proposition 2.0.48 sont valables pour cette extension.

2.0.50 THÉORÈME (THÉORÈME DE LA CONVERGENCE MONOTONE)

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables positives sur (X, Σ) telle que

1. $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq \infty, \quad \forall x \in X,$

2. $f_n(x) \to f(x)$ lorsque $n \to \infty, \quad \forall x \in X.$

Alors, f est mesurable, et pour $A \in \Sigma$ on a

$$\int_A f_n \, d\mu \to \int_A f \, d\mu \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Démonstration: La suite des intégrales est croissante $\int_A f_n \, d\mu \leq \int_A f_{n+1} \, d\mu$, donc converge dans $\bar{\mathbb{R}}$ i.e. il existe $l \in \bar{\mathbb{R}}$ tel que $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = l$. D'où $l \leq \int_A f \, d\mu$.

Pour la réciproque, on prend une fonction simple $S \leq f$ et un réel $a \in]0,1[$ et on pose $A_n = \{x \in A | f_n(x) \geq aS(x)\}$. Alors $A_n \subset A_{n+1}$ et $\cap_n A_n = A$. D'où, $\int_A f_n \, d\mu \geq \int_{A_n} f_n \, d\mu \geq a \int_{A_n} S \, d\mu$ et lorsque $n \to +\infty$, on voit que $l \geq a \int_A S \, d\mu$. Maintenant en faisant tendre a vers 1^+ on obtient $l \geq \int_A S \, d\mu$ et comme $S \leq f$ est arbitraire, on a

$$l \geq \sup_{S \leq f} \int_A S \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

2.0.52 REMARQUE

Pour toute fonction mesurable et positive f, on peut trouver une suite croissante de fonctions simple $S_n \nearrow f$, par exemple

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n^2} \frac{k}{n^2} \mathbb{1}_{f^{-1}(A_k)}(x)$$

où $A_k = [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ pour $0 \leq k \leq n^2 - 1$ et $A_{n^2} = [n, +\infty]$.

Par construction on a, $0 \leq f(x) - S_n(x) < \frac{1}{n}$ si $f(x) < n + 1$. la convergence est donc uniforme si f est bornée.

Comme conséquence du théorème de convergence monotone on aura pour une telle suite

$$\lim_n \int_X S_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

2.0.53 COROLLAIRE

Soit $f_n : X \longrightarrow [0, \infty]$ une suite de fonctions mesurables, $n \in \mathbb{N}$, et

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in X.$$

Alors

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Démonstration: Appliquer le théorème de la convergence monotone à la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. ∎

Si la suite f_n n'est pas nécessairement monotone on a le résultat suivant :

2.0.55 Théorème (Lemme de Fatou)
Soit $f_n : X \longrightarrow [0,\infty]$ une suite de fonctions mesurables, $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

Démonstration: On pose $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. Alors $g_{n+1} \geq g_n$ et $g_n \leq f_n$ ainsi $\int_X g_n \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu$. En passant à la limite inf on aura par le théorème de la convergence monotone

$$\liminf_n \int_X g_n \, d\mu = \lim_n \int_X g_n \, d\mu = \int_X \lim_n g_n \, d\mu = \int_X \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n \, d\mu.$$

2.0.57 Remarque

1. On n'a pas toujours l'égalité dans le lemme de Fatou :
   Par exemple, si $f_n = n\mathbb{1}_{]0,\frac{1}{n}]}$, $n \geq 1$ alors $\liminf_n = f_n \lim f_n = 0$ mais,
   $\liminf_n \int f_n = \int_{\mathbb{R}} f_n = 1$.
2. On n'a pas, sous les mêmes conditions, de résultat analogue pour la limite supérieure :
   i) Dans l'exemple précédent, on a $\int_{\mathbb{R}} \limsup_n f_n < \limsup_n \int_{\mathbb{R}} f_n$
   ii) Si $f_n = \begin{cases} \mathbb{1}_{[0,1]} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathbb{1}_{]1,2]} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
   Alors, $\limsup_n f_n$ est la fonction $\mathbb{1}_{[0,2]}$, d'où $\int_{\mathbb{R}} \limsup_n f_n = \lambda([0,2]) = 2$ et comme $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ on aura $\int_{\mathbb{R}} \limsup_n f_n > \limsup_n \int_{\mathbb{R}} f_n$

Passant, à la définition de l'intégrale pour une fonction mesurable (non nécessairement positive).

Soit $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable. Si $\int_X f^+ \, d\mu$ et $\int_X f^- \, d\mu$ sont finies on dira que f est **intégrable** et on pose

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu := \int_{\mathbb{R}} f^+ \, d\mu - \int_{\mathbb{R}} f^- \, d\mu$$

Pour une fonction à valeurs complexes $f : X \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ on dira que f est intégrable si ses parties réelle et imaginaire sont intégrables et on pose dans ce cas

$$\int_X f\, d\mu := \int_X \mathfrak{Re}(f)\, d\mu + i \int_X \mathfrak{Im}(f)\, d\mu$$

2.0.58 Remarque

On a alors f est intégrable si et seulement si $|f|$ est intégrable. (à vérifier)

2.0.59 Définition

Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré. On définit l'espace $\mathcal{L}^1(X)$ par

$$\mathcal{L}^1(X) = \left\{ f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} : \int_X |f|\, d\mu < \infty \right\}.$$

On note aussi cet espace par $\mathcal{L}^1(X, \Sigma, d\mu)$ ou $\mathcal{L}^1(X, d\mu)$.

2.0.60 Proposition

Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(X)$, alors

1. $$\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu.$$
2. $$\int_X |f + g|\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu + \int_X |g|\, d\mu.$$

Démonstration: Si $\alpha = \int_X f\, d\mu \neq 0$, on pose $a = \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}$.

Alors $\left|\int_X f\, d\mu\right| = a \int_X f\, d\mu = \int_X af\, d\mu = \int_X \mathfrak{Re}(af)\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu$.

Pour le second point, il suffit d'utiliser $|f + g| \leq |f| + |g|$. ■

2.0.62 Exercice

1. Soit f une fonction mesurable.
   Montrer que $f \in \mathcal{L}^1(X) \quad \Rightarrow \quad \lambda\left(\{x \,|\, f(x) = \infty\}\right) = 0$.
   Donner un contre-exemple qui invalide la réciproque.
2. Soit f une fonction mesurable.
   Montrer : $\int_X |f|\, d\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\left(\{x \,|\, f(x) \neq 0\}\right) = 0$ i.e. $f = 0$ p.p.

2.0.63 Exercice

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions mesurables sur X. telle que $(f_n(x))$ converge μ-p.p. i.e. il existe $A \subset X$, $\mu(A) = 0$ et pour tout $x \in A^c$ la suite $(f_n(x))$ converge.

On pose $f(x) = \begin{cases} \lim\limits_n f_n(x) & \text{si } x \in A^c \\ 0 & \text{si } x \in A \end{cases}$

Montrer que f est fonction mesurable. (voir la proposition 2.0.43)

2.0.64 THÉORÈME (CONTINUITÉ ABSOLUE)
Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout en sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^n$ on a

$$\left| \int_E f \, d\lambda \right| < \epsilon$$

Démonstration: .
On peut supposer que f est positive et que $\lambda(\{x \mid f(x) = \infty\}) = 0$. D'après la définition de l'intégrale de f, il existe une fonction simple s telle que
$0 \leq s \leq f$ et $\int_{\mathbb{R}^n} s \geq \int_{\mathbb{R}^n} f - \frac{\epsilon}{2}$.
Comme s ne prend qu'un nombre fini de valeurs, il existe $C > 0$ tel que $s(x) \leq C$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Alors, $\int_E f \, d\lambda = \int_E s \, d\lambda + \int_E f - s \, d\lambda \leq \int_E s \, d\lambda + \int_{\mathbb{R}^n} f - s \, d\lambda$, d'où $\int_E f \, d\lambda \leq C\lambda(E) + \frac{\epsilon}{2}$. Ainsi, $\delta = \frac{\epsilon}{2C}$ convient. ∎

2.0.66 THÉORÈME (THÉORÈME DE LA CONVERGENCE DOMINÉE DE LEBESGUE)
Soit $\{f_n\}$ et f des fonctions mesurables sur X telles que

1. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \mu$-pp
2. il existe $g \in \mathcal{L}^1(X)$ avec

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \mu\text{-pp}$$

Alors $f \in \mathcal{L}^1(X)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

et $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$.

Démonstration: Les parties réelles, imaginaires, positive et négative vérifient les mêmes conditions, on peut donc supposer sans perte de généralité que f_n et donc f sont positives.
D'après, le lemme de Fatou $\liminf_n \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X f \, d\mu$ et $\liminf_n \int_X (g - f_n) \, d\mu \geq \int_X (g - f) \, d\mu$. La dernière inégalité nous donne, $-\liminf_n \int_X f_n \, d\mu \geq -\int_X f \, d\mu$ i.e. $\int_X f \, d\mu \geq \limsup_n \int_X f_n \, d\mu$. Ainsi, $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$ et par suite $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu < \infty$.

2.0.68 COROLLAIRE
Soit $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ une suite de fonctions intégrables, telles que $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty$.
Alors la série $\sum_{n=1} f_n$ est absolument convergente p.p. et il existe une fonction mesurable f telle que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ p.p. et $\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu$.

Démonstration: On pose $g = \sum_{n=1} |f_n|$, alors

$$\int_X |g| d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty.$$

2.0.70 REMARQUE
1) Comme un ensemble de mesure nulle ne contribue pas à la valeur de l'intégrale, c'est pour cela qu'il est suffisant d'imposer les conditions seulement presque partout i ;e ; mise à part un ensemble de mesure nulle.

On doit toutefois vérifier :

La condition sur l'existence de la fonction intégrable g qui ne dépend pas de n est cruciale : par exemple, si $f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n,-n]}$, f est intégrable et $\lim_n f_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = \lim_n \frac{2n}{n} = 2 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu.$$

Appliquer le théorème de la convergence monotone à la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. ■

Application :

2.0.71 THÉORÈME (LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ANALYSE)
Soit $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable telle que F' soit bornée.

Alors $\int_a^b F'(x) \, dx = F(b) - F(a)$.

Démonstration: Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, on pose $x_{i,n} = a + i \left(\frac{b-a}{n} \right)$.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : [a, b[\to \mathbb{C}$ par :
$f_n(x) = \left(\frac{n}{b-a} \right) (F(x_{i+1,n}) - F(x_{i,n}))$ si $x \in [x_{i,n}, x_{i+1,n}[$ et $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Alors, pour tout $x \in [a, b[$ $\lim_n f_n(x) = f(x)$ et
$\int_a^b f_n(x) \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_{i+1,n}) - F(x_{i,n})) = F(b) - F(a).$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_{i,n} \in]x_{i,n}, x_{i+1,n}[$ tel que $F(x_{i+1,n}) - F(x_{i,n}) = F'(\xi_{i,n})(x_{i+1,n} - x_{i,n}) = f(\xi_{i,n})\frac{b-a}{n}$, ainsi, pour tout $x \in [a,b[$, $|f_n(x)| \leq \|f\|_\infty$, qui est finie, puisque $F' = f$ est bornée.

D'après le théorème de convergence dominée, $\lim_n \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$, ainsi $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx$. ∎

2.0.73 Exercice Soit μ une mesure positive et $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ un espace mesuré, et soit f une fonction intégrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$E_n = \{x \in X : 1/n \leq |f(x)| \leq n\}.$$

Alors chaque E_n est mesurable et $|f|$ y est bornée. Montrer que

1. $\mu(E_n)$ est finie pour tout n, et
2. $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,d\mu = \int_X f\,d\mu$.

Solution: Soit $f_n = f\chi_{E_n}$. Soit $x \in X$. Si $f(x) = 0$, alors $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $|f(x)| = \varepsilon > 0$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\frac{1}{n} < \varepsilon < n.$$

Alors $f_n(x) = f(x)$ pour tout $n \geq N$. d'où $f_n \to f$, et $|f_n| \leq |f|$. Une application du théorème de convergence dominée nous donne

1. Comme $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

$$n\mu(E_n) = \int_{E_n} n\,d\mu \leq \int_X |f_n|\,d\mu \leq \int_X |f|\,d\mu < \infty.$$

   Ainsi, $\mu(E_n)$ est finie.
2.
$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

D'autres conséquences du théorème de la convergence dominée :

2.0.75 Corollaire (Intégrale dépendant d'un paramètre)
Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré et (E, d) un espace métrique. Soit $f : X \times E \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x,t) \to f(x,t)$ une fonction. On suppose les conditions suivantes satisfaites :

1. pour tout $x \in X$, l'application partielle $t \mapsto f(x,t)$ est continue.
2. pout tout $t \in E$ l'application partielle $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable/
3. il existe $g \in \mathcal{L}^1(X)$ avec

$$|f(x,t)| \leq g(x) \quad \forall t \in E, \mu\text{- pp}$$

   Alors la fonction de $F : E \to \mathbb{C}$ définie par $F(t) := \int_X f(x,t)\,d\mu$ est continue.

Démonstration: Exercice ∎

2.0.77 COROLLAIRE (DÉRIVABILITÉ D'INTÉGRALE DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE)
Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré. Soit $f : X \times]a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$, $(x, t) \to f(x, t)$ une fonction. On suppose les conditions suivantes satisfaites :

1. pour tout $x \in X$, l'application partielle $t \mapsto f(x, t)$ est dérivable.
2. pout tout $t \in]a, b[$ l'application partielle $x \mapsto f(x, t)$ est mesurable/
3. il existe $g \in \mathcal{L}^1(X)$ avec
$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \quad \forall t \in]a, b[, \mu\text{-pp}$$
Alors la fonction de $F :]a, b[\to \mathbb{C}$ définie par $F(t) := \int_X f(x, t)\, d\mu$ est dérivable et $F'(t) = \displaystyle\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, d\mu$.

Démonstration: Exercice ∎

2.0.4 Intégration sur les espaces produits

Mesures produits

Soient (X_1, Σ_1, μ_1) et (X_2, Σ_2, μ_2) deux espaces mesurés.

On note $\Sigma_1 \bigotimes \Sigma_2$ la σ-algèbre engendrée par les rectangles $A_1 \times A_2$ où $A_1 \in \Sigma_1$ et $A_2 \in \Sigma_2$.

2.0.79 EXEMPLE. Pour $\mathcal{B}^1$ la σ-algèbre borélienne sur $\mathbb{R}$, la σ-algèbre borélienne sur $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B} \bigotimes \mathcal{B}$.

2.0.80 LEMME
Soit $A \in \Sigma_1 \bigotimes \Sigma_2$ alors ses sections :

$A(x_1) = \{x_2 \in X_2 | (x_1, x_2) \in A\}$ et $A(x_2) = \{x_1 \in X_1 | (x_1, x_2) \in A\}$ sont des ensembles mesurables.

Conséquence : Soit $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}^p$ une fonction mesurable alors les applications partielles

(i) $\forall x_1 \in X_1$, $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ est mesurable sur X_2

(ii) $\forall x_2 \in X_2$, $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ est mesurable sur X_1.

A partir des mesures μ_1 et μ_1 on construit une mesure produit $\mu = \mu_1 \bigotimes \mu_2$ sur $(X_1 \times X_2, \Sigma_1 \bigotimes \Sigma_2)$ sur les générateurs de la σ-algèbre produit, pour tout $A_1 \in \Sigma_1$ et $A_2 \in \Sigma_2$:

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

Une telle mesure est unique.

2.0.81 PROPOSITION
Soit $A \in \Sigma_1 \bigotimes \Sigma_2$. Alors les applications $x_1 \mapsto \mu_2(A(x_1))$ et $x_2 \mapsto \mu_1(A(x_1))$ sont mesurables et

$$\int_{X_1} \mu_2(A(x_1))\, d\mu_1 = \int_{X_2} \mu_1(A(x_2))\, d\mu_2.$$

Démonstration: Il suffit de voir que la conclusion de la proposition est vérifier par les générateurs i.e. les mesurables de la forme $A_1 \times A_2$. On étant alors cette relation à toute la σ-algèbre en utilisant le théorème de la convergence monotone. ∎

On peut alors définir pour $A \in \Sigma_1 \bigotimes \Sigma_2$, $\mu(A)$ par

$$\mu(A) := \int_{X_1} \mu_2(A(x_1))\, d\mu_1 = \int_{X_2} \mu_1(A(x_2))\, d\mu_2$$

de façon équivalente

$$\mu(A) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \mathbb{1}_A(x_1, x_2)\, d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} \mathbb{1}_A(x_1, x_2)\, d\mu_1 \right) d\mu_1$$

La relation précédente, s'étend par linéarité aux fonctions simples, et le passage à la limite et l'aide du théorème de convergence monotone permet d'obtenir le fameux théorème :

2.0.83 THÉORÈME (THÉOREME DE FUBINI)
Soit $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable par rapport à la mesure produit $\mu = \mu_1 \bigotimes \mu_2$: Alors

1. Si $f \geq 0$, alors :
   $x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2$ est mesurable sur X_1,
   $x_2 \mapsto \int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1$ est mesurable sur X_2 et

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1 \right) d\mu_2$$

2. En général i.e. f est à valeurs complexes, les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) $x_1 \mapsto \int_{X_2} |f(x_1, x_2)|\, d\mu_2 \in \mathcal{L}^1(X_1)$ et $x_2 \mapsto \int_{X_1} |f(x_1, x_2)|\, d\mu_1 \in \mathcal{L}^1(X_2)$
   (ii) $f \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2)$.

   Quand l'une des deux conditions est satisfaite on a :

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

Application :

2.0.84 THÉORÈME (FORMULE D'INTÉGRATION PAR PARTIES)
Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ deux fonctions intégrables On pose, pour $x \in [a,b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, et $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$. Alors

1. F et G sont continues.
2. On a la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^x F(t)g(t)\,dt = F(x)G(x) - \int_a^x f(t)G(t)\,dt$$

Démonstration: F et G sont continue grâce au théorème2.0.64.

Soit $x \in [a,b]$. On applique le théorème de Fubini à la fonction, $(t,s) \mapsto h(t,s) = \mathbb{1}_{\{a \le t \le s \le x\}} f(t)g(s)$, alors : cette fonction est intégrable (majorée par $(t,s) \mapsto |f(t)||g(s)|$) et

$$\int_{[a,b]\times[a,b]} h(t,s)\,dt\,ds = \int_a^x \int_a^s f(t)g(s)\,dt\,ds = \int_a^x F(s)g(s)\,ds$$

$$\int_{[a,b]\times[a,b]} h(t,s)\,dt\,ds = \int_a^x \int_t^x f(t)g(s)\,ds\,dt = \int_a^x f(t)(G(x)-G(t))\,dt = F(x)G(x) - \int_a^x f(t)G(t)\,dt$$

d'où le résultat.

2.0.86 Exercice Soit (X, Σ, μ) une mesure positive, et soit $f \ge 0$ une fonction mesurable sur X. On pose pour $t \in [0, +\infty[$

$$g(t) = \mu\left(\{x \in X : f(x) \ge t\}\right).$$

Montrer que

$$\int_X f(x)\,dx = \int_0^\infty g(t)\,dt.$$

Solution: On définit $E(t) = \{x \in X : f(x) \ge t\}$. Alors $g(t) = \mu(E(t))$, et pour t fixé,

$$\chi_{E(t)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{Si } t \le f(x), \\ 0, & \text{Si } t > f(x). \end{cases}$$

Ainsi,

$$\int_0^\infty g(t)\,dt = \int_0^\infty \int_X \chi_{E(t)}(x)\,dxdt.$$

Une application du théorème de Fubini au terme de droite nous donne

$$\int_0^\infty g(t)\,dt = \int_X \int_0^\infty \chi_{E(t)}(x)\,dt\,dx.$$

on a besoin d'intégrer jusqu'à $t = f(x)$, car au-delà $\chi_{E(t)}(x)$ est identiquement nulle. De plus, sur $[0, f(x)]$, l'intégrant vaut 1. Alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g(t)\,dt &= \int_X \int_0^\infty \chi_{E(t)}(x)\,dt\,dx \\
&= \int_X \int_0^{f(x)} dt\,dx \\
&= \int_X f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

2.0.5 Théorème de changement de variable

Dans cette partie, on désigne la mesure de Lebesgue par dx,dy etc..

2.0.88 DÉFINITION
Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\Phi : U \to V$ une application classe C^1. On dit que Φ est un difféomorphisme de classe C^1 si

1. Φ est bijective ;
2. Φ^{-1} est aussi de classe C^1.

2.0.89 REMARQUE
Grâce au théorème d'inversion locale, la deuxième condition peut être remplacée par : si $D\Phi(x)$ est la différentielle de Φ en x (représentée par la matrice $(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x))_{1\leq i,j\leq n}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$) alors : $\det D\Phi(x) \neq 0$.

2.0.90 THÉORÈME
Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et Φ un difféomorphisme de classe C^1 de U sur V. Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable sur V muni de la σ-algèbre borélienne. On a :

1. Si $f \geq 0$, alors
$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\Phi(x))\,|\det D\Phi(x)|\,dx. \tag{2.1}$$
2. En général, si f est de signe quelconque on a :
$f \in \mathcal{L}^1(V)$ si et seulement si $f \circ \Phi\,|\det D\Phi| \in \mathcal{L}^1(U)$
et dans ce cas la relation 2.1 est encore valable i.e.
$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\Phi(x))\,|\det D\Phi(x)|\,dx.$$

2.0.91 REMARQUE

Le résultat précédent reste valable si $\det D\Phi(x)$ s'annule sur une partie négligeable de U et que l'image par Φ de cette partie est de mesure nulle.

Les coordonnées polaires d'un point $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, sont les nombres $r, \theta_1, \dots, \theta_n$ définis par les relations

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1\cos\theta_2\dots\cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_2 = r\cos\theta_1\cos\theta_2\dots\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \\ x_3 = r\cos\theta_1\cos\theta_2\dots\sin\theta_{n-2} \\ \vdots \\ x_{n-1} = r\cos\theta_1\sin\theta_2 \\ x_n = r\sin\theta_1 \end{cases}$$

avec $r \geq 0$, $\theta_1, \dots \theta_{n-2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\theta_{n-1} \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Notons F l'ensemble des points $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ vérifiant ces conditions et $\phi : F \to \mathbb{R}^n$ l'application $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. L'application Φ n'est pas bijective.

On définit les ouverts, $U \subset F$ par $r > 0$, $\theta_1, \dots \theta_{n-2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\theta_{n-1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et $V = \mathbb{R}^n \setminus \{x_1 \geq 0, x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0\}$. Alors la restriction de Φ de U sur V est une bijection de classe C^∞, dont le jacobien

$$\det D\Phi(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = r^{n-1}\cos^{n-2}\theta_1\cos^{n-3}\theta_2\dots\cos\theta_{n-2} > 0$$

ainsi, $\Phi : U \to V$ est un difféomorphisme.

Comme $F \setminus U$ et $\mathbb{R}^n \setminus V$ sont négligeables, on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_F f\circ\Phi(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})\,|\det D\Phi(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})|\;dr.d\theta_1\dots d\theta_{n-1}.$$

$$= \int_F f(\Phi(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}))r^{n-1}\cos\theta_1^{n-2}\cos\theta_2^{n-3}\dots\cos\theta_{n-2}\,dr.d\theta_1\dots d\theta_{n-1}.$$

Application : Volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

Si f est une fonction radiale i.e. $f(x) = g(r)$ où $r = \|x\|$, alors la formule de changement de variables nous donne si f est intégrable

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 2\pi I_1 I_2 \dots I_{n-2}\int_0^{+\infty} r^{n-1}g(r)\,dr.$$

où $I_k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^k\theta\,d\theta$.

Un calcul par récurrence donne $I_k = \begin{cases} \pi.\frac{1.3.....(k-1)}{2.4....k} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 2.\frac{2.4.....(k-1)}{3.5....k} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$

Ainsi, $\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{+\infty} r^{n-1}g(r)\,dr$, où $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$

Maintenant, pour $f = \mathbb{1}_{B(0,1)}$, $g(r) = \mathbb{1}_{[0,1]}$ et le volume V_n de la boule unité de $\mathbb{R}^n$:

$$V_n = \mu(B(0,1)) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{B(0,1)}\,dx = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{+\infty} r^{n-1}\mathbb{1}_{[0,1]}\,dr$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^1 r^{n-1}\,dr = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

$$\text{D'où } V_n = \begin{cases} \dfrac{\pi^k}{k!} & \text{si } n = 2k \\ \dfrac{2^{k+1}\pi^k}{1.3.\ldots.(2k+1)} & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

2.0.92 Exercice Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+\|x\|^{2\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{n}{2}$.

2.1 Annexe

2.1.1 Preuve du théorème de changement de variable

On va dans cette partie donner une preuve du théorème de changements de variable 2.0.90.

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|x\| = \max_{j=1,\ldots,n}|x_j|$.

On va commencer par le cas particulier où $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, dans ce cas la formule à démontrer est $\displaystyle\int_V f(y)\,dy = |\det\Phi| \int_U f\circ\Phi(x)\,dx$.

Les opérations élémentaires sur une matrice inversible permettent de la réduire à l'identité, i.e. une application linéaire inversible Φ peut s'écrire comme la composée d'applications linéaires de l'une des trois formes suivantes :

① Type I (multiplication de la première coordonnée par un scalaire)

$$h_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

② Type II (somme des deux premières coordonnées)

$$\tau(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2 \ldots, x_n)$$

③ Type III (transposition de deux coordonnées)

$$\sigma_{ij}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i \ldots, x_n)$$

① Si Φ est de type I, on obtient, en remarquant que $|det(h_\lambda)| = |\lambda|$:

$$|det(h_\lambda)| \int_{\mathbb{R}^n} f(h_\lambda(x))\, dx = |\lambda| \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_n\, dx_2 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx.$$

en utilisant le théorème de Fubini et le résultat pour une fonction d'une variable suivant : si $\lambda \neq 0$, alors $|\lambda| \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt$.

② Si Φ est de type II, on obtient, en remarquant que $|det(\tau)| = 1$:

$$|det(\tau)| \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau(x))\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_n\, dx_2 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx.$$

en utilisant le théorème de Fubini et le résultat pour une fonction d'une variable suivant : $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t+s)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt$.

③ Si Φ est de type III, on obtient, en remarquant que $|det(\sigma_{ij})| = |-1| = 1$:

$$|det(\sigma_{ij})| \int_{\mathbb{R}^n} f(\sigma_{ij}(x))\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_j, \dots x_i, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_i \dots dx_j \dots dx_n$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_i, \dots x_j, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_i \dots dx_j \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$$

par le théorème de Fubini.

Comme, le déterminant d'une composition d'applications linéaires est le produit des déterminants, on a ainsi établit le résultat pour toute application linéaire et toute fonction définie mesurable et positive ou intégrable sur $\mathbb{R}^n$.

Maintenant, si la fonction f est définie seulement sur un ouvert V, on peut l'étendre à $\mathbb{R}^n$, en posant $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^n \setminus V$. Ainsi le résultat pour les applications linéaires est vrai sur tout ouvert de $\mathbb{R}^n$.

2.1.1 Corollaire

Pour tout application linéaire inversible $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et tout borélien $A \subset U$ on a

$$\mu(h(A)) = |\det h|\, \mu(A).$$

Démonstration: On applique la formule précédente lorsque $f = \mathbb{1}_A$. ∎

Passant maintenant au cas général i.e. Φ non nécessairement linéaire.

Soit C un cube de centre p et de côté de longueur $s > 0$ contenu dans U, alors $\mu(C) = (2s)^n$. Comme Φ est de classe C^1, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x \in C$,

$$\|\Phi(x) - \Phi(p)\| \leq \|x - p\| \left\{ \max_{y \in C} \|D\Phi(y)\| \right\} \leq s \left\{ \max_{y \in C} \|D\Phi(y)\| \right\}$$

i.e. $\Phi(C)$ est entièrement contenue dans le cube défini par

$$\{z \in V \mid \|z - \Phi(p)\| \leq s. \max_{y \in C} \|D\Phi(y)\|\}$$

d'où

$$\mu(\Phi(C)) \leq \left\{ \max_{y \in C} \|D\Phi(y)\| \right\}^n \mu(C).$$

Si on applique cette formule à $h^{-1} \circ \Phi$, où h est une application linéaire inversible, on obtient

$$\left|\det h^{-1}\right| \mu(\Phi(C))) = \mu(h^{-1} \circ \Phi(C)) \leq \left\{ \max_{y \in C} \|D(h^{-1} \circ \Phi)(y)\| \right\}^n \mu(C).$$

ainsi,

$$\mu(\Phi(C))) \leq |\det h| \left\{ \max_{y \in C} \|h^{-1} \circ D\Phi(y)\| \right\}^n \mu(C). \tag{2.2}$$

On décompose C en un nombre fini de cubes disjoints $C_1, \ldots, C_k$ de centre respectivement $x_1, \ldots, x_k$ et de côté $s_1, \ldots, s_k$. Soit $\delta = \max_{1 \leq i \leq k} s_i$. On applique 2.2 à chaque C_i et $h = D\Phi(x_i)$ on obtient

$$\mu(\Phi(C))) \leq \sum_{i=1}^{k} |\det D\Phi(x_i)| \left\{ \max_{y \in C} \|D\Phi(x_i)^{-1} \circ D\Phi(y)\| \right\}^n \mu(C_i).$$

Comme, Φ est de classe C^1, l'application $x \mapsto D\Phi(x)$ est continue, d'où $\lim_{z \to y} D\Phi(x_i)^{-1} \circ D\Phi(y) = I$, ceci entraîne $\lim_{z \to y} \|D\Phi(z)^{-1} \circ D\Phi(y)\| = 1$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|z - y\| < \delta$ entraîne $1 - \epsilon \leq \|D\Phi(z)^{-1} \circ D\Phi(y)\| \leq 1 + \epsilon$ pour tout $z \in B(y, \delta)$. D'où $\left\{\max_{y \in C} \|D\Phi(x_i)^{-1} \circ D\Phi(y)\|\right\}^n \leq (1 + \epsilon)^n$.

Ainsi

$$\mu(\Phi(C))) \leq (1 + \epsilon)^n \sum_{i=1}^{k} |\det D\Phi(x_i)| \, \mu(C_i).$$

Maintenant, $\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{k} |\det D\Phi(x_i)| \, \mu(C_i) = \int_C |\det D\Phi(x)| \; dx$, on obtient donc $\mu(\Phi(C))) \leq (1 + \epsilon)^n \int_C |\det D\Phi(x)| \; dx$, comme $\epsilon > 0$ est arbitraire ceci est équivalent à

$$\mu(\Phi(C))) \leq \int_C \det |D\Phi(x)| \; dx.$$

i.e

$$\int_V \mathbb{1}_{\Phi(C)}(y) \, dy \leq \int_U \mathbb{1}_{\Phi(C)} \circ \Phi(x) \, |\det D\Phi(x)| \; dx. \tag{2.3}$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient l'inégalité pour toute fonction simple positive.

En utilisant le fait que toute fonction mesurable et positive f est limite d'une suite croissante de fonctions simples positives et le théorème de convergence monotone, on obtient :

$$\int_V f(y)\,dy \leq \int_U f(\Phi(x))\,|\det D\Phi(x)|\;dx. \tag{2.4}$$

Si on applique l'inégalité 2.4 à Φ^{-1}, comme $x = \Phi^{-1}(y)$ et $D\Phi(\Phi^{-1}(y)) = I$, on obtient, l'inégalité inverse :

$$\int_U f(\Phi(x))\,|\det D\Phi(x)|\;dx \leq \int_V f(\Phi(\Phi^{-1}(y)))\left|\det D\Phi(\Phi^{-1}(y))\right|\;dx = \int_V f(y)\,dy \tag{2.5}$$

D'où le résultat. ■