1.2.4 Topologie quotient

1.2.60 DÉFINITION
Soit X un ensemble. Une relation $\mathscr{R}$ sur X est un sous-ensemble de $X \times X$. Si $(x, y) \in X \times X$, on écrit souvent $x\mathscr{R}y$ pour signifier $(x, y) \in \mathscr{R}$. On dit qu'une relation binaire R est une *relation d'équivalence* si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $\mathscr{R}$ est réflexive : $x\mathscr{R}x$ pour tout $x \in X$.
2. $\mathscr{R}$ est symérique : $x\mathscr{R}y$ est équivalent à $y\mathscr{R}x$.
3. $\mathscr{R}$ est transitive : si $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$, alors $x\mathscr{R}z$.

Si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur X, et si $x \in X$, la classe d'équivalence de x est l'ensemble $C_x = \{y \in X,\ y\mathscr{R}x\}$. Un sous-ensemble C de X est une classe déquivalence (pour $\mathscr{R}$), s'il existe $x \in X$ tel que $C = C_x$. Si $x, y \in X$, alors $x\mathscr{R}y$ si et seulement si $C_x = C_y$, sinon $C_x \cap C_y = \emptyset$. Les classes d'équivalence forment donc une partition de X.

Réciproquement, soit $(C_i)_{i\in I}$ une partition de X,(i.e. $X = \cup_{i\in I} C_i$ et $i \neq j$ entrîne $C_i \cap C_j = \emptyset$) alors les C_i sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie par $x\mathscr{R}y$ si et seulement si il existe $i \in I$ tel que $\{x, y\} \subset C_i$.

1.2.61 EXEMPLE. Par exemple, sur $\mathbb{R}^n$, on peut définir la relation d'équivalence :

$$x\mathscr{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^n.$$

1.2.62 DÉFINITION
Soit X un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur X. On définit le quotient $X/\mathscr{R}$ de X par la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ comme l'ensemble des classes d'équivalence. L'application π de X dans $X/\mathscr{R}$, qui à x associe sa classe d'équivalence (souvent notée $[x]$ ou $\bar{x}$), est surjective ; elle est appelée projection canonique (ou application quotient).

On note souvent $x \sim y$ au lieu de $x\mathscr{R}y$ et $X/\!\sim$ à la place de $X/\mathscr{R}$.

1.2.63 DÉFINITION (SATURÉ)
Soit A une partie de X, l'ensemble des points de X qui sont équivalents à un point de A est appelé le saturé de A pour la relation d'équivalence.
Le saturé de A s'écrit alors $\pi^{-1}(\pi(A))$ où π est la projection canonique de X sur $X/\sim$

1.2.64 DÉFINITION (PASSAGE AU QUOTIENT)
Une application $f : X \to Y$ est compatible avec la relation d'équivalence (ou passe au quotient) si elle est constante sur les classes d'équivalence i.e. on a $f(x) = f(y)$ pour tout (x, y) élément de $X \times X$ vérifiant $x \sim y$, on définit alors $\bar{f} : X/\!\sim \to Y$ par $\bar{f}([x]) = f(x)$, on a $f = \bar{f} \circ \pi$; on dit que f se factorise à travers $X/\!\sim$ ou que f se factorise à travers π, ce qui signifie que l'équation $f = g \circ \pi$ a une solution $g = \bar{f}$.

On a le diagramme commutatif :
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\!\sim \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Examples d'espaces quotients

Quelques exemples importants d'espace quotients :

1) Quotients d'espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E, et soit $F \subset E$ la classe d'équivalence de 0.

Pour que la structure d'espace vectoriel de E passe au quotient, on doit en particulier avoir $\lambda x \in F$ si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in F$ (puisque $\lambda 0 = 0$ dans $E/\!\sim$) et $x + y \in F$ si $x, y \in F$ (puisque $0 + 0 = 0$ dans $E/\!\sim$) ; en d'autres termes, F doit être un sous-espace vectoriel de E. De plus, comme $a + 0 = a$ dans $E/\mathscr{R}$, les classes d'équivalence doivent être les espaces affines $a + F$.

Réciproquement, si F est un sous-espace vectoriel de E, la relation $\sim$ définie sur E par $x \sim y \quad \text{ssi} \quad x - y \in F$ est une relation d'équivalence. Le quotient $E/\sim$ est noté E/F. Comme $x - y \in F \Rightarrow \lambda x - \lambda y \in F$, et que $x - y \in F$ et $x' - y' \in F \Rightarrow (x + x') - (y + y') \in F$, la structure d'espace vectoriel sur E passe au quotient. On a alors, pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $[x] + [y] := [x + y]$ et $\lambda[x] := [\lambda x]$.

1.2.65 DÉFINITION
La dimension de l'espace quotient de E par F est appelée la *codimension* de F dans E, ainsi $\operatorname{codim}_{\mathbb{K}}(F) := \dim_{\mathbb{K}}(E/F)$.

1.2.66 EXEMPLE. L'espace c_0 des suites qui convergent vers 0 est un sous-espace de codimension 1 de l'espace c des suites convergentes.

1.2.67 REMARQUE
Si $G \subset E$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F, les classes d'équivalence pour $\sim$ sont les sous-espaces affines $a + F$, avec $a \in G$. La restriction de l'application quotient à G est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $G \to E/F$.

2) Action de groupe
Soit G un groupe et X un ensemble. Une action (à gauche) de G sur X est une application $G \times X \to X,\ (g,\ x) \mapsto g.x$ telle que

$$\forall x \in X, \forall g, h \in G,\ (gh).x = g(h.x) \text{ et } e.x = x, \text{ où } e \text{ est l'élément neutre de } G.$$

On peut alors considérer la relation d'équivalence associée dont les classes d'équivalences sont les orbites de l'action de G : $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G,\ y = g.x$.
L'espace quotient est noté X/G.

Par exemple, $T^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ le tore de dimension n est défini comme le quotient de $\mathbb{R}^n$ par la relation d'équivalence : $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^n$.
3) Quotient par une fonction
Soit $f : X \to Y$ une application entre deux ensembles. On définit la relation d'équivalence $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$. Les classes d'équivalence s'appellent les *fibres* de f; ce sont les sous-ensembles de la forme $f^{-1}(y),\ y \in Y$.
Par construction, f est compatible avec $\sim$ et l'application quotient $\bar{f} : X/\!\sim \to Y$ est injective. Si de plus f est surjective, alors $\bar{f}$ est bijective.

1.2.68 DÉFINITION (TOPOLOGIE QUOTIENT)

Soit X un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X et π la projection canonique de X sur $X/\!\sim$. La *topologie quotient* sur $X/\!\sim$ est celle pour laquelle U est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert.
C'est équivalent à : F est fermé si et seulement si $\pi^{-1}(F)$ fermé. En effet, F est fermé $\Leftrightarrow X/\!\sim \backslash F$ est ouvert $\Leftrightarrow \pi^{-1}(X/\!\sim \backslash F)$ est ouvert. Puisque $\pi^{-1}(X/\!\sim \backslash F) = X \backslash \pi^{-1}(F)$, ceci équivaut à : $\pi^{-1}(F)$ est fermé.

1.2.69 THÉORÈME
i) La topologie quotient est la topologie la plus fine telle que π est continue.
ii) Soit Y un espace topologique et $f : X \to Y$ une application qui passe au quotient en $\bar{f}$. Alors

$$f \text{ est continue } \iff \bar{f} \text{ est continue .}$$

(i.e. l'application de $\mathscr{C}^0(X/\!\sim, Y)$ dans $\{f \in \mathscr{C}^0(X,\ Y) |\, x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)\}$ définie par $g \mapsto g \circ \pi$, est une application bijective)
iii) Si l'application f est ouverte alors $\bar{f}$ est aussi ouverte.
Si l'application f est fermée alors $\bar{f}$ est aussi fermée.

Démonstration: i) Soit $\mathscr{T}$ une topologie sur le quotient. Alors, π est continue pour $\mathscr{T} \Leftrightarrow \pi^{-1}(U)$ est ouvert pour tout $U \in \mathscr{T} \Leftrightarrow$ tout ouvert de $\mathscr{T}$ est un ouvert de la topologie quotient $\Leftrightarrow \mathscr{T}$ est moins fine que la topologie quotient.

ii) Si $\bar{f}$, il en est de même pour la composée $f = \bar{f} \circ \pi$. Réciproquement, pour tout ouvert U de Y on a puisque $\bar{f} \circ \pi = f$, $\pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(U)) = (f \circ \pi)^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ qui est ouvert par continuité de f. Donc $\bar{f}^{-1}(U)$ est ouvert, donc $\bar{f}$ est continue.

iii) Soit U un ouvert de $X/\sim$. Alors $\bar{f}(U) = f(\pi^{-1}(U))$, qui est ouvert, car $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans X et f est ouverte. ■

1.2.71 Exemple (le cercle). On considère sur $\mathbb{R}$ la relation d'équivalence : $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ définie par $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, où $\mathbb{S}^1$ est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.
L'application f passe au quotient parce que $\cos(2\pi t)$ et $\sin(2\pi t)$ sont compatibles avec $\sim$. On vérifie que $\bar{f}$ est bijective, d'où $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est en bijection avec le cercle $\mathbb{S}^1$. D'autre part, f est continue et ouverte, et alors $\bar{f}$ est continue et ouverte. Ainsi, $\bar{f}$ est un homéomorphisme de T sur $\mathbb{S}^1$.

1.2.72 Exemple. Si X est un espace topologique on considère les actions de groupe par homéomorphisme i.e. il existe un homomorphisme de groupes $\phi : G \to Homeo(X)$ i.e. pour chaque $g \in G$, $\phi(g)$ est un homéomorphisme. Souvent, $\phi(g)(x)$ est noté $g.x$ et on considère l'action $G \times X \to X,\ (g,\ x) \mapsto g.x$.

1.2.73 Exemple. (1) L'exemple du cercle $\mathbb{S}^1$ (voir 1.2.71) se généralise en dimension supérieure. Regardons le cas de la sphère de dimension deux :

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1,\ x_2,\ x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

Si $s,\ t \in [0,1]$, on pose $\theta = 2\pi s,\ \varphi = \pi t$, de sorte que $0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi$. Définissons $g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ par :

$$g(s,\ t) = (\cos(\theta)\sin(\varphi),\ \sin(\theta)\sin(\varphi),\ \cos(\varphi))$$

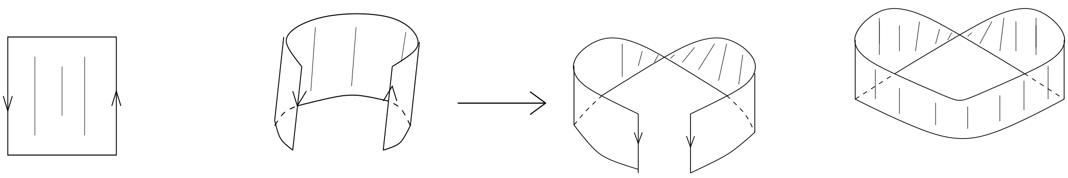
On peut vérifier que g induit un homéomorphisme :

$$\overline{g} : [0,1] \times [0,1]/\!\sim \to \mathbb{S}^2$$

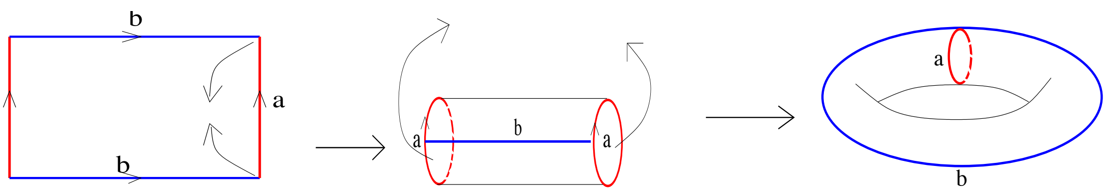
où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par : $(0,\ t) \sim (1,\ t)$, $(s,\ 0) \sim (s',\ 0)$ et $(s,\ 1) \sim (s',\ 1)$, $\forall s,\ s' \in [0,1]$.

(2) Le ruban simple est défini comme le quotient du carré $[0,1] \times [0,1]$ par la relation $(0,\ t) \sim (1,\ t)$
(il est sous-entendu que $(s,\ t) \sim (s,t)$ si $s \neq 0,1$).

(3) Le *ruban de Möbius*, est défini comme le quotient du carré $[0,1] \times [0,1]$ par l'identification : $(0,\ t) \sim (1, 1-t)$.



(4) Le *tore* T^2 peut être redéfini comme quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par les identifications $(s,\ 0) \sim (s,\ 1)$ et $(0,\ t) \sim (1,\ t)$.



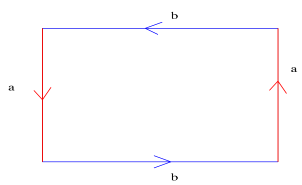
L'application $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $f(s,\ t) = ((\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)), (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)))$ induit un homéomorphisme de $[0,1] \times [0,1]/\sim$ sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Ceci permet de plonger T^2 dans $\mathbb{R}^4$. On peut aussi voir T^2 comme une surface de $\mathbb{R}^3$, en effet c'est la surface

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, (\sqrt{x^2+y^2} - (R-r))^2 + z^2 = r^2\} \quad \text{où } R > r > 0.$$

(5) La *bouteille de Klein* est définie comme le quotient du carré $[0,1] \times [0,1]$ par les identifications : $(s,\ 0) \sim (s,\ 1)$ et $(0,\ t) \sim (1, 1-t)$.

Cette surface ne peut pas être plongée dans $\mathbb{R}^3$, mais dans $\mathbb{R}^4$.

(6) Le *plan projectif réel* $\mathbb{RP}^2$ peut être défini comme le quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par la relation $(s,\ 0) \sim (1-s,\ 1)$, $(0,\ t) \sim (1, 1-t)$.



1.2.74 EXEMPLE. Si $A \subset X$, on peut définir la relation d'équivalence :

$xRy \Leftrightarrow x \in X\backslash A$ et $x = y$ ou bien $x,\ y \in A$

Les classes d'équivalence sont donc de la forme :

$C_x = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \in X\backslash A \\ A & \text{si } x \in A \end{cases}$

L'espace quotient est noté X/A. La projection canonique $\pi : X \to X/A$ envoie le sous-ensemble A sur un seul point, la classe d'équivalence A ; elle est injective sur $X\backslash A$.

1.2.75 Exercice Montrer que $\mathbb{B}^n/\mathbb{S}^{n-1}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$, où $\mathbb{B}^n$ est la boule unité fermée dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{S}^{n-1}$ la sphère associée.

On pourra considérer l'application

$$f\ :\ \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^n,\ x \mapsto (\frac{x_1}{||x||}sin(\pi||x||),\ \dots,\ \frac{x_n}{||x||}sin(\pi||x||),\ cos(\pi||x||))$$

pour $x \neq 0$ et qui envoie 0 sur le pôle nord $(0,\ \dots,\ 0, 1)$.

On pourra vérifier que : $f(x) = f(x') \Leftrightarrow x = x'$ ou $x,\ x' \in \mathbb{S}^{n-1}$.

1.2.5 Critères de séparation d'un quotient

Un quotient d'un espace séparé n 'est pas toujours séparé, par exemple le quotient de $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ où l'on identifie $(x,\ 0)$ et $(x,\ 1)$ si $x \neq 0$: le quotient est localement homéomorphe à $\mathbb{R}$, mais les points distincts $[(0,0)]$ et $[(0,1)]$ n'ont pas de voisinages disjoints.

1.2.76 Exercice On considère sur $\mathbb{R}$ la relation d'équivalence $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.
Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas séparé.

1.2.77 Définition

Le *graphe* d'une relation d'équivalence $\sim$ sur un ensemble X est l'ensemble
$\mathscr{R} = \{(x,\ y) \in X \times X |\ x \sim y\}$.

1.2.78 Proposition

La projection $\pi\ :\ X \to X/\sim$ est *ouverte* si et seulement si le saturé de tout ouvert est un ouvert.

La projection $\pi : X \to X/\sim$ est *fermée* si et seulement si le saturé de tout fermé est un fermé.

Démonstration: Par définition, π est ouverte si et seulement si, pour tout ouvert $U \subset X$, $\pi(U)$ est ouvert, ce qui équivaut à $\pi^{-1}(\pi(U))$ est ouvertc'est-à-dire si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert. ■

1.2.80 REMARQUE
La projection peut être fermée sans être ouverte. En effet, on considère $[0,1]$ avec l'identification $0 \sim 1$. Le saturé de l'ouvert $[0, \frac{1}{2}[$, est $[0, \frac{1}{2}[\cup\{1\}$, qui n'est pas ouvert ; donc la projection canonique $\pi : [0,1] \to [0,1]/\sim$ n'est pas ouverte. Par contre, on voit facilement que le saturé d'un fermé F de $[0,1]$ est soit F soit $F \cup \{0\}$ ou $F \cup \{1\}$, qui sont des fermés, ainsi la projection canonique est fermée.

1.2.81 EXEMPLE. Si la relation d'équivalence est associée à une action de groupe alors π est ouverte :
En effet, si U est ouvert, $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup\limits_{g \in G} g.U$ est ouvert car les $g.U$ sont ouverts (g est un homéomorphisme).

1.2.82 PROPOSITION
Soit X un espace topologique muni d'une relation d'équivalence $\sim$.

i) Si le quotient $X/\!\sim$ soit séparé, alors le graphe $\mathscr{R}$ de $\sim$ est fermé.
ii) Si π est ouverte et $\mathscr{R}$ est fermé, alors $X/\!\sim$ est séparé.

Démonstration: i) Le graphe $\mathscr{R}$ est l'image réciproque de la diagonale par

$$\pi \times \pi : X \times X \to (X/\!\sim) \times (X/\!\sim).$$

Celle-ci est fermée puisque $X/\!\sim$ est séparé, donc $\mathscr{R}$ est fermé puisque $\pi \times \pi$ est continue.

ii) Soient $[x]$ et $[y]$ deux points distincts de $X/\!\sim$. Donc $(x,\ y) \notin \mathscr{R}$, donc il existe des voisinages ouverts V_x de x et V_y de Y tels $(V_x \times V_y) \cap \mathscr{R} = \emptyset$. Alors $\pi(V_x)$ et $\pi(V_y)$ sont des voisinages ouverts disjoints de $[x]$ et de $[y]$ respectivement, donc $X/\!\sim$ est séparé. ∎

1.2.84 REMARQUE
On peut très bien avoir un quotient séparé sans que la projection π soit ouverte, (voir 1.2.80). Par contre dans le cas d'action de groupe la projection canonique est toujours ouverte, donc pour montrer que le quotient est séparé il suffit, d'après 1.2.82, de montrer que le graphe est fermé. Nous allons donner une condition suffisante.

1.2.85 PROPOSITION
Soit $(g,\ x) \mapsto g.x$ une action propre d'un groupe G sur un espace topologique séparé X. On suppose que G agit proprement sur X i.e. pour tous $x,\ y \in X$, il existe des voisinages V_x de x et V_y de Y tels que $\{g \in G \,|\, g.V_x \cap V_y \neq \emptyset\}$ est fini. Alors le quotient X/G est séparé.

En particulier, si G est fini, X/G est séparé.

Démonstration: On sait déjà que π est ouverte (1.2.82), il suffit de montrer que son graphe $\mathscr{R} = \{(x,\ y) \in X \times X | y \in G.x\}$ est fermé. Soit $(x,\ y) \notin \mathscr{R}$ c'est-à-dire $y \notin G.x$, il suffit de trouver des voisinages ouverts U_x et U_y tels que $U_x \times U_y \subset X \backslash \mathscr{R}$, c'est-à-dire $G.\ U_x \cap U_y = \emptyset$.

Soient V_x et V_y des voisinages ouverts donner par la proprieté. On écrit $\{g \in G \,|\, g.V_x \cap V_y \neq \emptyset\} = \{g_1, \ldots, g_n\}$.

Puisque $y \notin G.x$ et que X est séparé, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe des voisinages ouverts $W_{i,x} \subset V_x$ et $W_{i,y} \subset V_y$ tels que $g_i.W_{i,x} \cap W_{i,y} = \emptyset$. Posant $U_x = \bigcap_{g \in G(V_x, V_y)} W_{g,x}$ et $U_y = \bigcap_{i=1}^{n} W_{i,y}$, on obtient des voisinages ouverts de x et de y. Alors, pour $g \in G$, on a soit $g \in \{g_1, \ldots, g_n\}$ donc $g.U_x \cap U_y \subset g.W_{g,x} \cap W_{g,y} = \emptyset$, soit $g \notin \{g_1, \ldots, g_n\}$ donc $g.U_x \cap U_y \subset g.V_x \cap V_y = \emptyset$. Donc $G.U_x \cap U_y = \emptyset$. ■

1.2.87 Exercice Monter que $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ est séparé.

Espace quotient d'un evn

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace de E. On veut définir une norme sur l'espace quotient ; on pose pour cela

$$N([x]) := d(x,\ F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

il faut commencer par montrer que cette quantité ne dépend pas du choix du représentant de la classe $[x]$. Si $x \sim x'$ alors $x - x' \in F$ et par conséquent

$d(x,\ F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \inf_{y \in F} \|x' - (y + x' - x)\| = \inf_{y' \in F} \|x' - y'\| = d(x',\ F)$.

On peut à présent vérifier les axiomes d'une semi-norme :

1) On a $N([0]) = d(0,\ F) = 0$.
2) Pour $\lambda \neq 0$ on a

$$N([\lambda x]) = \inf_{y \in F} \|\lambda x - y\| = |\lambda| \inf_{y \in F} \|x - \lambda^{-1} y\|$$
$$= |\lambda| d(x,\ F) = |\lambda| N([x]).$$

3) Il reste à vérifier l'inégalité triangulaire, soit

$$N([x] + [x']) = d(x + x',\ F) \leq d(x,\ F) + d(x',\ F) = N([x]) + N([x']).$$

Or pour tout $y,\ y' \in F$ on a $y + y' \in F$ et donc

$$d(x + x',\ F) \leq \|x + x' - y - y'\| \leq \|x - y\| + \|x' - y'\|.$$

En passant à la borne inférieure dans l'inégalité précédente successivement dans la variable y puis y', on obtient l'inégalité désirée.

On a défini ainsi une semi-norme sur E/F.

1.2.88 PROPOSITION

1) N une norme sue E/F si et seulement si F est fermé.

2) La projection canonique est une application linéaire continue et ouverte de $(E, \|.\|)$ sur $(E/F,\ N(.))$.

3) La norme N définit la topologie quotient.

Démonstration: 1) En effet, $N([x]) = 0 \Leftrightarrow d(x,\ F) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{F}$. Ainsi $N([x]) = 0 \Leftrightarrow [x] = [0]$ est équivalent à $x \in \overline{F} \Leftrightarrow x \in F$, i.e. $F = \overline{F}$ donc F est fermé dans E.

2) La linéarité de la projection canonique $\pi : E \to E/F$ est conséquence de la définition de la structure linéaire sur E/F et pour la continuité on a :

$$N(\pi(x)) = N([x]) = d(x,\ F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| \leq \|x\|$$

ce qui implique $\|\pi\| \leq 1$.
On va montrer que π est une application ouverte. Comme π est linéaire, il suffit de vérifier que $\pi(B_E(0,1))$ est un voisinage de l'origine. Ce dernière point découlera de l'égalité

$$\pi(B_E(0,1)) = B_{E/F}([0],1).$$

Soit $[x] \in B_{E/F}([0],1)$ alors $d(x,\ F) < 1$ et il existe donc $y \in F$ tel que $\|x - y\| < 1$ par conséquent $[x] = \pi(x - y) \in \pi(B_E(0,1)$. Réciproquement, si $[x] = \pi(x) \in \pi(B_E(0,1))$ alors $N([x]) \leq \|\pi\|.\|x\| < 1$, donc $[x] \in B_{E/F}([0],1)$.

3) La topologie quotient est la topologie la plus fine rendant la projection canonique π continue, elle est donc plus fine que la topologie induite par la norme N.

Réciproquement, si U est un ouvert, pour la topologie quotient, et $[x] \in U$, alors $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert contenant x. Il existe alors un $r > 0$ tel que $B_E(x,r) \subset \pi^{-1}(U)$, d'où

$$B_{E/F}([x],r) = \pi(B_E(x,r)) \subset \pi(\pi^{-1}(U)) = U.$$

Ainsi U est un ouvert pour la topologie définie par la norme. ∎

1.3 Complétude

Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X est de Cauchy si

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n,\ x_m) = 0,$$

i. e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon)$ tel que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

pour $n, m \geq N$.

1.3.1 Définition
L'espace (X, d) est complet si toute suite de Cauchy converge.

Soit A une partie de X.
Le diamètre $\delta(A)$ de A est par définition $\sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$.

1.3.2 Théorème
Un espace mérique est complet si et seulement si toute intersection dénombrable décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0, est non vide.
Elle est alors égale à un singleton.

Démonstration:

1. Supposons (X, d) complet, et soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite de fermés. Soit $x_n \in F_n$ une suite, elle est de Cauchy car $d(x_n, x_m) \leq \delta(F_{min(m,n)})$. Elle a donc une limite a, et a est adhérent à tous les F_n donc appartient à tous puisqu'ils sont fermés.
2. Réciproquement, supposons vérifiée la propriété sur les fermés. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de X, posons $F_n = \overline{\{x_m | m \geq n\}}$. Alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$ puisque (x_n) est de Cauchy. Donc $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton a : ainsi la suite (x_n) admet a pour valeur d'adhérence, et comme elle est de Cauchy, elle converge vers a. ∎

1.3.4 Remarque
Si le diamètre ne tend pas vers 0 (même si il est borné), l'intersection peut être vide.
Exemple : 1) Soit $\mathbb{N}$ muni de la métrique $d(n,m) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = m, \\ 1 + \frac{1}{n+m} & \text{sinon.} \end{cases}$.
$(\mathbb{N}, d)$ est complet (car la topologie induite est la topologie discrète).

Pour $n \geq 1$, on prend $F_n = B(n, 1 + \frac{1}{2n})$. Alors, $F_n = \{n+1, n+2, n+3, \dots\}$ est fermé, $F_{n+1} \subset F_n$, $1 < \delta(F_{n)} < 2 + \frac{1}{n}$ mais, $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} F_n = \emptyset$.

2) Dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $e_n = (\delta_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ la suite canonique. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \{e_l \,|\, l \geq n\}$. Alors F_n est fermé, $F_{n+1} \subset F_n$, $\delta(F_{n)} = \sqrt{2}$, mais, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$.

1.3.5 Théorème

Soit Y un sous-espace d'un espace métrique (X, d).
(Y, d) est complet si et seulement si Y est fermé dans X.

Démonstration: " $\Longrightarrow$ " Si $x \in \overline{Y}$, il est limite d'une suite $(x_n) \in Y^{\mathbb{N}}$ qui converge dans X. Comme Y est complet, (x_n) converge dans Y, donc $x \in Y$.
" $\Longleftarrow$ " Si $(x_n) \in Y^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, elle est de Cauchy dans X donc converge dans X. Comme Y est fermé, sa limite est dans Y donc elle converge dans Y.

Continuité uniforme. Prolongement des applications uniformément continues

1.3.7 Définition

Une application $f : (X,\ d) \to (Y,\ d')$ entre deux espaces métriques est *uniformément continue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $(d(x,\ x') \leq \delta \Rightarrow d'(f(x),\ f(x')) \leq \varepsilon$.

Bien sur, l'uniforme continuité implique la continuité, mais la réciproque est fausse : l'application $f : x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue, mais pas uniformément :
en effet, $f(n + \dfrac{1}{n}) - f(n) = 2 + \dfrac{1}{n^2} > 2$, alors que $d(n,\ n + \dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{n} \to 0$.

1.3.8 Définition (Module de continuité)

Un *module de continuité* pour $f : (X, d) \to (Y,\ d')$ est une fonction continue $m : [0, \delta_0[\to \mathbb{R}_+, 0$ telle que $m(0) = 0$ et

$$d(x,\ x') < \delta_0 \Rightarrow d'(f(x),\ f(x')) \leq m(d(x,\ x')).$$

1.3.9 PROPOSITION
Soit $f : (X,\ d) \to (Y,\ d')$ une application entre deux espaces métriques. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) f est uniformément continue.

ii) f admet un module de continuité.

Démonstration: $(i) \Rightarrow (ii)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\delta_n > 0$ tel que $(d(x,\ x') < \delta_n \Rightarrow d'(f(x),\ f(x')) \leq 2^{-n})$. Quitte à diminuer δ_n, on peut supposer que (δ_n) décroit strictement vers 0. On définit alors $m(\delta_n) = 2^{-n+1}$, qu'on prolonge de façon affine sur chaque $[\delta_{n+1},\ \delta_n]$, et par $m(0) = 0$. La fonction $m : [0,\ \delta_0[\to [0,1]$ ainsi obtenue est croissante bijective, donc continue. De plus, si $0 < d(x,\ x') \leq \delta_0$, il existe n tel que $\delta_{n+1} \leq d(x,\ x') \leq \delta_n$, donc $d'(f(x),\ f(x')) \leq 2^{-n} = m(\delta_{n+1}) \leq m(d(x,\ x'))$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Si on se donne $\varepsilon > 0$, par continuité de m il existe $\delta > 0$ tel que $m(r) \leq \varepsilon$ pour $r \leq \delta$, d'où

$$d(x,\ x') \leq \delta \Rightarrow d'(f(x),\ f(x')) \leq m(d(x,\ x')) \leq \varepsilon.$$

1.3.11 EXEMPLE. Les deux exemples classiques de module de continuité sont

$i) m(r) = Cr$: une application f telle que $d'(f(x),\ f(x')) \leq Cd(x,\ x')$ est dite C-lipschitzienne (ou C- Lipschitz), lipschitzienne si l'on ne précise pas C.

$ii) m(r) = Cr^\alpha,\ \alpha > 0$: une application f telle que $d'(f(x),\ f(x')) \leq Cd(x,\ x')^\alpha$ est dite α-hölderienne (ou α-Hölder), hölderienne si l'on ne précise pas α.

1.3.12 Exercice Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction α-hölderienne avec $\alpha > 1$. Montrer que f est constante.

1.3.13 THÉORÈME (LE THÉORÈME DE PROLONGEMENT)
Soit (E, d_E) un espace métrique, $A \subset E$ une partie dense et (F, d_F) un espace métrique complet. Soit $f : A \to F$ une application uniformément continue.

Alors, il existe une unique application uniformément continue $\tilde{f} : E \to F$ telle que $\tilde{f}|_A = f$. De plus f et $\tilde{f}$ ont même module de continuité.

Démonstration: L'unicité résulte du prolongement des identités puisque E est séparé. Reste à montrer l'existence. Soit $x \in E$, par densité il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tendant vers x. Alors (a_n) est une suite de Cauchy, et l'uniforme continuité implique que $(f(a_n))$ aussi. Donc par complétude de F, $(f(a_n))$ converge. La limite ne dépend pas de la suite (a_n), car si l'on prend une autre suite (a'_n) tendant vers x, on en fabrique une troisième (a''_n) en alternant les termes des deux premières. En prenant cette limite pour valeur de $\tilde{f}(x)$, on obtient l'extension cherchée. On a bien une extension car si $x \in A$ on prend la suite constante $(a_n = a)$.

Enfin, montrons que $\tilde{f}$ est uniformément continue. En effet, soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ donné par l'uniforme continuité de f. Si $d(x, x') < \delta$ et $a_n \to x$, $a'_n \to x'$, alors pour n assez grand on a $d(a_n, a'_n) < \delta$, donc $d(f(a_n), f(a'_n)) \leq \delta$. Donc à la limite on a $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) \leq \delta$. Ceci implique $\tilde{f}$ est uniformément continue.

Soit $(\delta \mapsto m(\delta))$ un module de continuité pour f. Soient $\delta > 0$, $x, x' \in X$ tels que $d(x, x') < \delta$. Soient (a_n), (b_n) dans A tels que $a_n \to x$, $b_n \to x'$, alors pour n assez grand on a $d(a_n, b_n) < \delta$, donc $d(f(a_n), f(b_n)) \leq m(\delta)$. Donc à la limite on a $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) \leq m(\delta)$. Ceci implique $\tilde{f}$ est uniformément continue et δ est un module de continuité pour $\tilde{f}$. ∎

Complétion

1.3.15 Théorème

Soit X un espace métrique. Il existe un plongement isométrique $i\colon X \hookrightarrow \hat{X}$ de X dans un espace métrique complet, tel que $i(X)$ est un sous-espace dense. Un tel plongement est unique à une isométrie près : si $j\colon X \hookrightarrow \tilde{X}$ est un autre plongement de X dans un espace métrique complet $\tilde{X}$ tel que $j(X)$ est sous-espace dense, alors il existe une isométrie $\phi\colon \hat{X} \to \tilde{X}$ telle que $\phi \circ i = j$.

1.3.16 Définition

Le couple $(\widehat{X}, i)$ formé d'un espace métrique complet $\widehat{X}$ et d'un plongement isométrique i de X dans $\widehat{X}$ tel que $i(X)$ est un sous-espace dense, s'appelle le *complété* de X. Souvent, par abus de langage, on parle de l'espace $\widehat{X}$ comme le complété de X. Ceci permet d'identifier X à un sous-espace dense de $\widehat{X}$.

Le théorème 1.3.15 est une conséquence des deux théorèmes suivants.

1.3.17 Théorème (plongement de Kuratowski)

Tout espace métrique (X, d) se plonge isométriquement dans l'espace vectoriel normé

$$\ell^\infty(X) := \{x = (x(y))_{y \in X} \in \mathbb{R}^X \mid \|x\|_\infty = \sup_{y \in X} |x(y)| < \infty\}$$

des applications bornées de X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Démonstration: Nous allons définir un plongement isométrique

$$i\colon X \hookrightarrow \ell^\infty(X),$$

appelé *plongement de Kuratowski.* Fixons un point $x_0 \in X$ et pour tout $x \in X$ définissons l'image $i(x)$ dans $\ell^\infty(X)$ comme suit : $i(x)_y = d(x,y) - d(x_0,y)$.
Étant donné un point $x \in X$, la fonction $y \mapsto i(x)_y = d(x,y) - d(x_0,y)$ est majorée grâce à l'inégalité triangulaire : $|d(x,y) - d(x_0,y)| \leq d(x,x_0)$, la borne ne dépend pas de y, seulement de x. Étant donné deux points $x, z \in X$ quelconques, on a pour tout $y \in X$:

$$\begin{aligned} |i(x)_y - i(z)_y| &= |d(x,y) - d(x_0,y) - d(z,y) + d(x_0,y)| \\ &= |d(x,y) - d(z,y)| \\ &\leq d(x,y). \end{aligned}$$

D'autre part, en posant $y = x$, on obtient

$$|i(x)_x - i(z)_x| = |d(x,x) - d(z,x)| = d(x,z).$$

D'où $d_\infty(i(x), i(z)) = \sup_{y\in X}|i(x)_y - i(z)_y| = d(x,z)$ i.e. i est une isométrie. ∎

1.3.19 THÉORÈME
Soit Γ un ensemble. L'espace métrique

$$\ell^\infty(\Gamma,\mathbb{R}) = \{x = (x(\gamma))_{\gamma\in\Gamma} \in \mathbb{R}^\Gamma \mid \|x\|_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma}|x(\gamma)| < \infty\}$$

muni de la norme $\|.\|_\infty$ est complet.

Démonstration: (1) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\ell^\infty(\Gamma)$. Cela veut dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $|x_n(\gamma) - x_m(\gamma)| < \varepsilon$ si $n, m \geq N$. Par conséquent, la suite $(x_n(\gamma))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc elle possède une limite. Notons-là $x(\gamma)$. Nous avons construit une fonction $x\colon \Gamma \to \mathbb{R}$, telle que

$$\forall\gamma \in \Gamma,\ \ x_n(\gamma) \to x(\gamma). \tag{1.3.1}$$

(2) Montrons que cette fonction est bornée. Choisissons une valeur de $\varepsilon_0 > 0$ quelconque (par exemple, $\varepsilon_0 = 1$). Il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout $\gamma \in \Gamma$, $|x_n(\gamma) - x_N(\gamma)| < 1$. Cela implique $\forall\gamma \in \Gamma,\ \ |x(\gamma)| \leq |x_N(\gamma)| + 1$, et par conséquent $\sup_{\gamma\Gamma}|x(\gamma)| \leq \sup_{\gamma\in\Gamma}|x_N(\gamma)| + 1 < \infty$. Ainsi, $x \in \ell^\infty(\Gamma)$.

(3) Finalement, on va montrer que $x_n \to x$ par rapport à la distance uniforme d_∞. Soit $\varepsilon > 0$. Fixons N tel que quelque soit $n, m \geq N$, on ait $d_\infty(x_m, x_n) < \varepsilon$. On

en déduit que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $|x_m(\gamma) - x_n(\gamma)| < \varepsilon$, donc, en prenant la limite $m \to \infty$ dans $\mathbb{R}$, $|x(\gamma) - x_n(\gamma)| \leq \varepsilon$ et, en prenant la borne supérieure sur tous $\gamma \in \Gamma$, on obtient

$$d_\infty(x, x_n) = \sup_{\gamma\in\Gamma} |x_m(\gamma) - x_n(\gamma)| \leq \varepsilon.$$

On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que quel que soit $n \geq N$, on a $d_\infty(x, x_n) \leq \varepsilon$, ce qui veut dire $x_n \to x$ lorsque $n \to \infty$, par rapport à la distance d_∞ (la distance uniforme) sur l'espace $\ell^\infty(\Gamma, \mathbb{R})$. ∎