1.2.1 Topologie produit

1.2.32 DÉFINITION
Soit $\{X_i, i \in I\}$ une famille d'ensembles. On définit l'ensemble produit $X = \prod_{i\in I} X_i$ comme l'ensemble des applications $x : I \to \cup_{i\in I} X_i$, telles que $x(i) \in X_i$. Pour $x \in X$, on écrit $x = (x_i)$ où $x_i = x(i)$.
Pour tout $i \in I$, l'application $p_i : X \to X_i$, définie par $p_i(x) = x_i$, est appelée la projection sur le facteur d'indice i.

1.2.33 REMARQUE
L'ensemble d'indices I, n'est pas nécessairement ordonné, malgré cela on utilise la notation informelle $x = (x_i)$. Un point x du produit est par définition une fonction "qui choisit" une coordonnée x_i pour chaque ensemble X_i. Dire qu'une telle fonction de "choix" existe si et seulement si les X_i sont non vides est précisemment l'axiome du choix. D'où

1.2.34 THÉORÈME
L'axiome du choix est quivalent au fait que le produit d'ensembles non vides est un ensemble non vide.

1.2.35 DÉFINITION
Soit (X_i, τ_i), $i \in I$, une famille d'espaces topologiques, finie ou infinie. Notons $X = \prod_{i\in I} X_i$ le produit des X_i, et $p_i : X \to X_i$ la projection sur le facteur d'indice i i.e. $p_i(x) = x_i$. La topologie produit sur X est la topologie la moins fine (i.e. avec le moins d'ouverts possible) rendant les projections p_i continues. L'espace X muni de cette topologie est le produit (topologique) des espaces topologiques X_i.

Sauf mention contraire, l'ensemble produit d'une famille d'espaces topologiques sera muni de la topologie produit.

La projection p_i est continue si et seulement si $p_i^{-1}(U)$ est ouvert si si $U \subset X_i$ est ouvert. Une telle partie de X sera appelée *cylindre ouvert*, on notera $C_i(U) = U \times \prod_{i\neq j} X_i = \{(x_i)_{i\in I} | x_j \in U\}$. Une intersection finie de cylindres ouverts sera appelé *pavé ouvert* qu'on notera : $\bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(U_j) = \prod_{j\in J} U_j \times \prod_{i\in I\setminus J} X_i$ où J est une partie finie de I.

1.2.36 Proposition

Soit (X_i, τ_i), $i \in I$, une famille d'espaces topologiques.

1) L'ensemble des pavés ouverts est une base de la topologie produit, donc tous ouvert est réunion de pavés ouverts.
2) l'espace produit est séparé si et seulement si chaque (X_i, τ_i) est séparé.
3) Soit Y un espace topologique. Une application $f = (f_i)_{i \in I} : Y \to \prod_{i \in I} X_i$ est continue si et seulement si les applications coordonnées $f_i = p_i \circ f : Y \to X_i$ sont continues. (Cette propriété caractérise la topologie produit.)

Démonstration: 1) Les pavés ouverts de $\prod_{i \in I} X_i$ forment une base de topologie.

Nous devons vérifier les axiomes (i) et (ii) d'une base de topologie 1.2.5
Pour (i), il suffit de prendre $J = \emptyset$, de sorte que le pavé correspondant est $\prod_{i \in I} X_i$.
Vérifions (ii) ; soient J, $J' \subset I$ deux sous-ensembles finis, $\{U_j\}_{j \in J}$ et $\{U'_{j'}\}_{j \in J'}$ deux familles d'ouverts $U_j \subset X_j$ et $U'_{j'} \subset X_{j'}$. Si $h \in J \cup J'$, on pose :

$$U''_h = \begin{cases} U_h \cap U'_h & \text{si } h \in J \cap J' \\ U_h & \text{si } h \in J \backslash J' \\ U'_h & \text{si } h \in J' \backslash J \end{cases}$$

et alors $\bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(U_j) \cap \bigcap_{j' \in J'} p_{j'}^{-1}(U'_{j'}) = \bigcap_{h \in J \cup J'} p_h^{-1}(U''_h)$.

Soit τ' une topologie sur $\prod_{i \in i} X_i$ pour laquelle les $\pi_j : \prod_{i \in i} X_i \to X_j$ soient continues.
Si $U_j \subset X_j$ est ouvert, on doit avoir $p_j^{-1}(U_j) \in \tau'$. Il s'ensuit que tout pavé $\bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(U_j)$ appartient à τ' et donc aussi tout ouvert de la topologie produit.

2) Supposons tous les X_i séparés. Soient $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$ deux points distincts de X. Alors il existe i tel que $x_i \neq y_i$, donc il existe U et V ouverts disjoints de X_i contenant x_i et y_i. Alors $p_j^{-1}(U)$ et $p_j^{-1}(V)$ sont des ouverts disjoints de X contenant x et y. Donc X est séparé. Ainsi la topologie définie par les pavés ouverts est plus fine que toute autre qui rend les projections continues, donc c'est la topologie produit.

3) Si f est continue, alors $p_i \circ f$ est continue $\forall i \in I$, car chaque p_i est continue.
Réciproquement, si $p_i \circ f$ est continue $\forall i \in I$, soit $\bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(U_j)$ un pavé ouvert. On a :

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(U_j)\Big) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(p_j^{-1}(U_j)) = \bigcap_{j \in J} (p_j \circ f)^{-1}(U_j)$$

qui est ouvert puisque $p_i \circ f$ est continue par hypothèse. Comme tout ouvert de $\prod_{i \in I} X_i$ est réunion de pafés, il s'ensuit que f est continue.

1.2.38 REMARQUE
Si on avait défini la topologie produit comme celle engendrée par tous les produits d'ouverts, $\prod_{n\in I} U_i$, avec U_i un ouvert de X_i, la dernière propriété aurait été presque toujours fausse pour I infini.

1.2.39 Exercice i) On munit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de la topologie, engendrée par tous les produits d'ouverts, $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$, avec U_n un ouvert de $(\mathbb{R}, |.|)$.
Montrer que que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $f(x) = (x, x, \dots)$ n'est pas continue, mais que sa composée avec chaque projection est continue.
(indication : montrer que l'image réciproque de l'ouvert $U = \prod_{n\in\mathbb{N}}]-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}[$ n'est pas un ouvert des $\mathbb{R}$.)

ii) Montrer que $[0,1]^{\mathbb{N}}$ n'est pas compact pour la topologie définie en i).
On verra, plus loin (Théorème de Tychonov), qu'il est compact pour la topologie produit.
(indication : on pourra montrer que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $e_n = (\delta_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ et $\delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$, n'a pas de valeurs d'adhérence dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$.)

1.2.40 EXEMPLE (TOPOLOGIE DE LA CONVERGENCE SIMPLE). Soient X un ensemble et Y un espace topologique. L'ensemble Y^X s'identifie aux applications de X dans Y, effet une application $f : X \to Y$ est représentée par l'élément $(f(x))_{x\in X}$ de Y^X. La topologie produit est alors appelée dans ce cas topologie de la convergence simple. En effet, une suite d'application $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de X dans Y, converge vers une application f pour la topologie produit si et seulement si, pour tout $x \in X$, tout cylindre ouvert $U_x \times Y^{X-\{x\}}$ contenant f contient presque tous les f_n. Un tel cylindre s'écrit comme $\{g \in Y^X | g(x) \in U_x\}$. Autrement dit, pour tout ouvert de Y, U_x contenant $f(x)$ et pour tout n assez grand, on a $f_n(x) \in U_x$, soit $\lim_n f_n(x) = f(x)$.

1.2.41 REMARQUE
Si X n'est pas dénombrable et Y est un espace topologique séparé, qui a au moins deux éléments, alors la topologie produit sur Y^X n'est pas métrisable, i.e. la topologie de la convergence simple n'est pas métrisable. Mais il est toujours séparé d'après la proposition 1.2.36.
En effet, soient y_0 et y_1 deux points distincts de Y.

On définit $S_0 = \{g : X \to Y \mid X \setminus g^{-1}(y_0) \text{ est fini }\}$. Alors S_0 est dense dans Y^X. En effet, soit $f \in Y^X$. Soit P un pavé ouvert voisinage de f. Alors, il existe un nombre fini de points de X, x_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, et des voisinages ouverts U_i de $f(x_i)$ tels que $h \in P$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $h(x_i) \in U_i$. Soit

$g \in Y^X$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $g(x_i) = h(x_i)$ et $g(x) = y_0$ ailleurs. Alors $g \in P \cap S_0$.

Supposons, que Y^X soit métrisable. Soit f la fonction constante, qui prend la valeur y_1. Par densité de S_0, il existe une suite $(g_n)_n$ de S_0 qui converge vers f. L'ensemble $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X \,|\, g_n(x) \neq y_0\}$ est dénombrable, comme toute union dénombrable d'ensembles finis. Comme X n'est pas dénombrable, $X \setminus D \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in X \setminus D$ fixé. Pour tout ouvert U contenant $y_1 = f(x_0)$, il existe $N > 0$, tel que pour tout $n \geq N$, on a $g_n(x_0) = y_0 \in U$, comme $y_1 \neq y_0$, ce qui contredit le fait que Y soit séparé.

Par exemple $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, n'est pas métrisable, bien que $\{0,1\}$ soit séparé pour la topologie induite par $(\mathbb{R}, |.|)$.

1.2.42 Exercice Montrer qu'en revanche le produit dénombrable d'espaces métriques est toujours métrisable :

Soient $(X_n,\ d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'espace métriques.

Pour tous $(x_n), (y_n) \in X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ posons

$$d((x_n),\ (y_n)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \min\left(d_n(x_n, y_n),\ \frac{1}{n+1}\right).$$

Montrer que d est une distance sur X qui définit la topologie produit.

(dans la définition de d on peut remplacer $(\frac{1}{n+1})$, par toute suite (ξ_n) de nombres réels strictement positifs qui converge vers 0.)

1.2.43 Exercice Montrer que la distance

$$d'((x_n),\ (y_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

est topologiquement équivalente à la distance d.

1.2.2 Compacité - Théorème de Tychonov

Recouvrements ouverts, espaces compacts

Soit X un espace topologique. Un recouvrement ouvert de X est une famille $U = (U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de X dont la rín est X. Si $A \subset X$, un recouvrement de A par des ouverts de X est une famille $U = (U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de X (ou ambiants) dont la réunion contient A. Un sous-recouvrement de U est un recouvrement de la forme $V = (U_j)_{j \in J}$, avec $J \subset I$.

1.2.44 DÉFINITION
Un espace topologique est *compact* s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini.

1.2.45 REMARQUE
Dans le cas où un espace topologique (non forcément séparé) vérifie la propriété que tout recouvrement ouvert admet un sous recouvrement fini on dit qu'il est *quasi-compact*.

En passant aux complémentaires, on obtient la caractérisation :

1.2.46 PROPOSITION
Un espace topologique est compact si et seulement si il est séparé et si toute famille de fermés dont les intersections finies sont non vides a une intersection non vide.

1.2.47 EXEMPLE. 1) Un espace discret est compact si et seulement si il est fini.

2) $\mathbb{R}$ n'est pas compact car le recouvrement par les intervalles $]n, n+2[, n \in \mathbb{Z}$, n'admet aucun sous-recouvrement fini. De même pour tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ puisqu'il est homéomorphe à $\mathbb{R}$.

3) Une partie $A \subset X$ est compacte (ou est un compact) si elle est compacte pour la topologie induite.

1.2.48 PROPOSITION
1. Tout compact dans un espace séparé est fermé.
2. Tout fermé dans un espace compact est compact.

Démonstration:
1. Soit $K \subset X$ un compact d'un espace séparé. Fixons $a \in X \setminus K$. Pour tout $x \in K$, il existe deux voisinages ouverts disjoints U_x et V_x de x et a respectivement. La famille $(U_x)_{x \in K}$ forme un recouvrement ouvert de K, donc par compacité il existe un nombre fini déléments $x_1, \ldots, x_n \in A$ tels que les U_{x_i} recouvrent K. Alors l'intersection V des V_{x_i} est un voisinage ouvert de a contenu dans $X \setminus K$. Ainsi $X \setminus K$ est un voisinage de chacun de ses points, donc il est ouvert, donc K est fermé.
2. Soit $F \subset X$ un fermé dans un espace compact. Comme X est séparé, F aussi. Soit U un recouvrement ouvert de F, alors en ajoutant l'ouvert $X \setminus F$ on obtient un recouvrement ouvert U_1 de X. Par compacité, U_1 a un sous-recouvrement fini, et en enlevant $X \setminus F$ on obtient un sous-recouvrement fini de U. Donc F est compact. ■

1.2.50 PROPOSITION (PROPRIÉTÉS DES ESPACES COMPACTS)
1) Tout espace compact est régulier i.e. deux fermés disjoints dans un espace compact sont contenus dans deux ouverts disjoints.

2) Dans un espace compact, tout point a une base de voisinages compacts i.e. si V est un voisinage de x dans un espace compact X, il existe un voisinage compact W de x contenu dans V.

3) Soit $f : X \to Y$ une application continue d'un espace compact vers un espace séparé. Alors, pour tout fermé F de X, $f(F)$ est compact.

4) Soient X un espace quasi-compact, Y un espace séparé. Alors toute application continue et bijective $f : X \to Y$ est un homéomorphisme.

Démonstration: 1) Soient F, $F' \subset X$ deux fermés disjoints dans un espace compact. Comme dans la preuve de 1.2.48, pour tout $a \in F' \subset X \setminus F$, on peut trouver deux ouverts disjoints : $V_a \subset X \setminus F$, contenant a et W_a contenant F respectivement. La famille $(V_a)_{a\in F'}$ forme un recouvrement ouvert de F', donc par compacité, il existe un nombre fini d'éléments $a_1, \ldots, a_n \in F'$ tels que les V_{a_i}, $i \in \{1, \ldots, n\}$, recouvrent F'. D'autre part, l'intersection $\bigcap_{i\in\{1,\ldots,n\}} W_{a_i}$ est un voisinage ouvert de F. Alors $W = \bigcap_{i\in\{1,\ldots,n\}} W_{a_j}$ et $V = \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} V_{a_j}$ sont deux ouverts disjoints contenant F et F' respectivement.

2) il s'agit de trouver un sous-voisinage W fermé. On peut supposer V ouvert. Puisque $\{x\}$ et $X\backslash V$ sont deux fermés disjoints, il existe d'après 1) des ouverts disjoints U_1 et U_2 les contenant respectivement. Alors $\overline{U_1} \subset \overline{X\backslash U_2} = X\backslash U_2 \subset V$. Donc $W = \overline{U_1}$ convient.

3) Soit $F \subset X$ un fermé, on sait qu'il est compact. Comme Y est séparé, $f(F)$ l'est aussi. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $f(F)$ par des ouverts de Y. Par continuité, les images réciproques $f^{-1}(U_i)$ forment un recouvrement ouvert de F, donc on peut trouver un sous-recouvrement fini $(f^{-1}(U_j))_{j\in J}$. Alors $(U_j)_{j\in J}$ forme un sous-recouvrement ouvert de $f(F)$, d'où $f(F)$ est compact.

4) Comme f est continue, injective et Y séparé, X est alors séparé et par suite compact.
Soit $F \subset X$ un fermé. D'après la proposition 1.2.48 F est compact, d'après 3) $f(F)$ est compact et donc fermé puisque Y est séparé. Comme $f(F) = (f^{-1})^{-1}(F)$, on montré que l'imagé réciproque d'un fermé par f^{-1} est un fermé, i.e. f^{-1} est continue.

1.2.3 Filtres et compacité

On l'a rappelé, la compacité d'un espace topologique n'est pas équivalente au fait que toute suite possède une sous-suite convergente (aucune des implications n'est vraie). Nous allons ici remplacer les suites par les filtres, éclairés par le fait que la convergence des suites est un cas particulier de la convergence des filtres.

Le théorème suivant est la clef de voûte de la démonstration du théorème de Tychonov.

1.2.52 THÉORÈME
Soit X un espace topologique séparé. Les propositions suivantes sont équivalentes

(i) X est compact.

(ii) Tout filtre sur X admet une valeur d'adhérence.

(iii) Tout ultrafiltre sur X converge.

Démonstration: $i) \Longrightarrow ii)$ Supposons que $\mathscr{F}$ est un filtre sur X sans valeur d'adhérence. On a alors $\bigcap_{A \in \mathscr{F}} \overline{A} = \emptyset$. Par compacité de X, on se ramène à une intersection finie vide, $\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_n = \emptyset$. Mais alors$A_k \in \mathscr{F}$, donc $\overline{A}_n \in F$, ce qui contredit la stabilité d'un filtre par intersection finie.

$ii) \Longrightarrow iii)$ voir 1.2.30

$iii) \Longrightarrow i)$ On suppose que X n'est pas compact, d'où l'existence d'une famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés telle que toute intersection finie des F_i est non vide et $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$.

Soit $\mathscr{F}$ le filtre engendré par les F_i, et $\mathscr{U}$ un ultrafiltre contenant $\mathscr{F}$. Soit x la limite de $\mathscr{U}$. En particulier, x est valeur d'adhérence de $\mathscr{U}$, et donc $\bigcap_{A \in \mathscr{U}} \overline{A} \neq \emptyset$. En particulier, les F_i étant fermés et éléments de $\mathscr{U}$, on a : $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$. ∎

On peut remarquer la simplicité de cette démonstration (par comparaison par exemple avec l'équivalence entre les propriétés de Borel-Lebesgue et de Bolzano-Weierstrass pour les espaces métriques).

1.2.54 DÉFINITION
Soit $f : X \to Y$ une application et $\mathscr{F}$ un filtre sur X. L'image directe par f du filtre $\mathscr{F}$ est le filtre sur Y définit par $f(\mathscr{F}) := \{B \subset Y \,|\, f^{-1}(B) \in\}$.

1.2.55 THÉORÈME (LE THÉORÈME DE TYCHONOV)
le produit d'espaces compacts est compact (pour la topologie produit)

1.2.56 LEMME
Soit (X_i, τ_i), $i \in I$, une famille d'espaces topologiques et $X = \prod_{i \in I} X_i$.

Alors un filtre $\mathscr{F}$ sur X converge vers $x \in X$ si et seulement si $\forall i \in I$, $p_i(\mathscr{F})$ converge vers $p_i(x)$.

Démonstration: $\Longrightarrow$ Par définition, $V(x) \subset \mathscr{F}$. Soit $V_i$un voisinage de $p_i(x)$. Alors $p_i^{-1}(V_i)$ est un ouvert de X contenant x, et donc $p_i^{-1}(V_i) \in V(x) \subset \mathscr{F}$, ce qui est la définition de $V \in p_i(\mathscr{F}) := \{B \subset X_i \mid p_i^{-1}(B) \in \mathscr{F}\}$.

$\Longleftarrow$ Soit U un pavé ouvert voisinage de x, i.e. $U = \bigcap\limits_{j \in J} p_j^{-1}(U_j)$ avec $J \subset I$ fini. Comme les U_j sont des voisinages de $p_j(x)$, on a donc $U_j \in p_j(F)$, ce qui donne $p_j^{-1}(U_j) \in \mathscr{F}$, ainsi par stabilité par intersections finies des filtres, on a $U \in \mathscr{F}$. Comme les pavés ouverts forment une pour la topologie produit, $V(x) \subset \mathscr{F}$.

Démonstration: (du théorème de Tychonov) Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur X. alors pour tous $i \in I$, $p_i(\mathscr{U})$ est un ultrafiltre sur X_i, qui converge, par compacité de X_i vers un point $x_i \in X_i$. on définit x, avec $p_i(x) = x_i$. D'après le lemme, l'ultrafiltre $\mathscr{U}$ converge vers x. D'où X est compact. ■

1.2.59 REMARQUE

En fait, on peut montrer, en suivant les mêmes lignes, une version quasi-compact du théorème de Tychonov i.e. le produit d'espaces quasi-compacts est quasi-compact. Réciproquement, le théorème de Tychonov (quasi-compact) implique l'axiome du choix, (ce qui pourrait sembler surprenant puisque c'est un énoncé topologique, alors que l'axiome du choix est un énoncé ensembliste).

En effet, soit X_i, $i \in I$ une famille d'ensembles non vide ; on note $\tilde{X}_i = X_i \cup \{i\}$. Notons $X = \prod\limits_{i \in I} \tilde{X}_i$ et p_i la projection sur $\tilde{X}_i$.

On munit chaque $\tilde{X}_i$, d'une topologie dont les ouverts sont les ensembles cofinis (i.e. un ensemble est ouvert si et seulement si son complémentaire est fini), l'ensemble vide, et $\{i\}$. Alors $\tilde{X}_i$ est compact (à vérifier). D'autre part X_i est le complémentaire de l'ouvert $\{i\}$, est donc fermé pour la topologie de $\tilde{X}_i$. Les images réciproques $p_i^{-1}(X_i)$ sont donc fermées, non vides.

Pour tout sous-ensemble fini J de I, on peut choisir un élément x_i dans chaque X_i, $i \in J$ et compléter en prenant $x_i = i$ lorsque $i \notin J$. L'élément de X ainsi construit est bien dans $\bigcap\limits_{i \in J} p_i^{-1}(X_i) \neq \emptyset$. Comme X est quasi-compact (par le théorème de Tychonov), l'intersection $\bigcap\limits_{i \in I} p_i^{-1}(X_i) \neq \emptyset$. Donc le produit $\prod\limits_{i \in I} X_i = \bigcap\limits_{i \in I} p_i^{-1}(X_i)$ est non vide, d'où l'axiome du choix.