Liste des notations et symboles

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit scalaire.
$\| \cdot \|$	norme.
$\oplus$	somme directe (orthogonale).
$A^{\perp}$	le complémentaire orthogonal de A.
$\overline{A}$	l'adhérence de A.
$\overset{o}{A}$	l'intérieur de A.
$B(a, r)$	la boule ouverte de centre a et de rayon r.
$\bar{B}(a, r)$	la boule fermée de centre a et de rayon r.
$\mathscr{L}(X, Y)$	l'espace des opérateurs continus (applications linéaires continues) de X dans Y.
$\mathscr{L}(X)$	$= \mathscr{L}(X, X)$.
c	l'espace des suite convergentes.
c_0	l'espace des suites qui convergent vers 0.
c_{00}	l'espace des suites a support fini.
$\mathbb{N}$	l'espace des entiers naturels.
$\mathbb{Z}$	l'ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{Q}$	l'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	l'espace des nombres complexes.
$\mathbb{K}$	désigne un corps, dans la pratique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$\mathfrak{Re}(z)$	la partie réelle du nombre complexe z.
$\mathfrak{Im}(z)$	la partie imaginaire du complexe z.
$C(\Omega)$	l'espace des fonctions continues sur Ω.
$C^k(\Omega)$	l'espace des fonctions dont la différentielle d'ordre k est continue sur Ω.
$C^{\infty}(\Omega)$	l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω.
$\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$	l'espace des polynômes en $X_1, \ldots, X_n$.
$\mathbb{K}_d[X_1, \ldots, X_n]$	l'espace des polynômes en $X_1, \ldots, X_n$ de degré au plus d
$C_c(\Omega)$	l'espace des fonctions continues et à support compact sur Ω.
$C_0(\Omega)$	l'espace des fonctions continues nulles à l'infini.
$\mathscr{D}(\Omega)$	l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact sur Ω.
$d(x, y)$	la distance entre x et y.
$d(x, A)$	$= \inf_{y \in A} d(x, y)$, la distance de x à A.
$\emptyset$	l'ensemble vide.
$H^s(\Omega)$	l'espace de Sobolev d'ordre s.
$H^s_0(\Omega)$	l'adhérence de $\mathscr{D}$ dans H^s.
$\operatorname{Im} T$	l'image de l'opérateur T.
$\operatorname{Ker} T$	le noyau de l'opérateur T.
$\ell^{\infty}(I, \mathbb{K})$	l'espace des familles bornées.
$\ell^{p}(I, \mathbb{K})$	l'espace des familles p-sommables

$L^{\infty}(E,\Sigma,\mu)$	l'espace des classes de fonctions essentiellement bornées sur E.
$L^{p}(E,\Sigma,\mu)$	l'espace des classes de fonctions p-intégrable sur E.
$\partial A(ou\ Fr(A))$	la frontière de A.
$\sigma(T)$	le spectre de l'opérateur T.
$\sigma_p(T)$	le spectre ponctuel de l'opérateur T.
Vect(A)	l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A.
T^*	l'operateur adjoint de T.
X'	$=\mathscr{L}(X,\mathbb{K})$, l'espace dual topologique de X .
X''	$=\mathscr{L}(X',\mathbb{K})$, l'espace bidual topologique de X .

Chapitre 1

Vocabulaire

1.1 Espaces vectoriels et opérateurs linéaires

1.1.1 Des fonctions aux espaces de fonctions

En analyse fonctionnelle, nous considérons les fonctions comme des points ou des vecteurs dans un espace de fonctions. Comme, on peut additionner des fonctions défines sur un domaine commun en définissant $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ et les multiplier par des scalaires, en défnissant $(af)(x) := af(x)$, on voit ainsi qu'un espace fonctionnel peut être muni d'une structure *vectoriel*.

De plus, on peut envisager une sorte de *mesure* sur un espace fonctionnel, qui quantifie les similarités (ou dissimilarités) des fonctions. Le choix d'une telle distance dépend de l'application. Un choix "naturel" de distance entre f et g est la *"distance sup"*

$$\|f-g\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|.$$

Il s'agit clairement d'une mesure, donc un espace de fonctions devient non seulement un espace vectoriel mais aussi un *espace métrique*. Ces espaces seront appelés *des espaces vectoriels normés*. Un autre choix de distance possible serait

$$\|f-g\|_1 := \int_a^b |f(x)-g(x)|\, dx$$

Heuristiquement, $\| f-g\|_\infty$ petite, force les valeurs de f et g à rester proches partout sur $[a,b]$, tandis que $\|f-g\|_1$ petite, force les valeurs de f et g à rester proche seulement "en moyenne". Contrairement aux espaces de dimension finie, la notion de converge et plus généralement la topologie , dépend enormément de la norme choisie, en dimension infinie.

1.1.2 Exemples d'espaces vectoriels

Voici quelques exemples d'espaces vectoriels de fonctions :

1. $F = \{$l'espace des fonctions de$\mathbb{K} \to \mathbb{K}\}$. Cet espace est immense, et n'est en général pas très intéressant à étudier.
2. {l'espace des solutions homogènes d'une équation linéaire aux dérivées partielles }
3. $L^1[a,b] = \{$les (classes de) fonctions Lebesgue intégrable sur $[a,b]\}$
4. $L^\infty[a,b] = \{$ les (classes de) fonctions essentiellement bornées sur $[a,b]\}$
5. $C[a,b] = \{$les fonctions continues sur $[a,b]\}$
6. $C^1[a,b] = \{$les fonctions continûment dérivables sur $[a,b]\}$
7. $C^\infty[a,b] = \{$ les fonctions indéfiniment différentiables sur $[a,b]\}$
8. $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_d[X]$

Il y a aussi de nombreux exemples naturels d'espaces de suites :

1. $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, |$ les suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ $\}$. Cet espace est trop gros. On s'intéressera plutôt à certains de ses sous-espaces. Pour $p \in \mathbb{R}_+^*$
2. $\ell^p(\mathbb{K},\mathbb{N})$ = { l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, p-sommables i. e. $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty$.}
3. $\ell^\infty(\mathbb{K},\mathbb{N}) = \{$l'ensemble des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{K}\}$
4. $c(\mathbb{K},\mathbb{N}) = \{$ l'ensemble des suites convergentes d'éléments de $\mathbb{K}\}$
5. $c_0(\mathbb{K},\mathbb{N}) = \{$l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ qui convergent vers $0\}$
6. $c_{00}(\mathbb{K},\mathbb{N}) = \{$l'ensemble des suites à support fini d'éléments de $\mathbb{K}$ $\}$ i.e. $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ s'il existe $N(x) \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = 0$ pour tout $n \geq N(x)$.

1.1.3 Sous-espace vectoriel

Un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, est un sous-ensemble stable pour les opérations d'addition de vecteurs et de multiplication par des scalaires :

1.1.1 DÉFINITION
Un sous-ensemble E_1 d'un espace vectoriel E est appelé *sous-espace vectoriel* si pour tout $x, y \in E_1$, $a, b \in \mathbb{K}$, on a $ax + by \in E_1$.

1.1.2 EXEMPLE. On peut vérifier que :

$\mathbb{K}_n[x] \subset \mathbb{K}[x] \subset C^\infty[a,b] \subset C^k[a,b] \subset C[a,b] \subset L^\infty[a,b] \subset L^p[a,b] \subset F,$

$c_{00} \subset \ell^p \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}.$

Toutes ces inclusions sont des *inclusions de sous-espace*.

1.1.3 EXEMPLE. Soit E un espace vectoriel. Montrer que $\{0\}$ et E sont des sous-espaces de E. Montrer que l'intersection d'une collection arbitraire de sous-espaces de E est encore un sous-espace E.

1.1.4 Base de Hamel

Comme nous le savons, tout espace vectoriel de *dimension finie* E admet une base $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Une base est un sous-ensemble linéairement indépendant maximal de vecteurs de E. Le nombre n d'éléments de la base est appelé la dimension de E ; ce nombre est indépendant du choix de la base. Chaque vecteur $x \in E$ peut être uniquement exprimé en une combinaison linéaire d'éléments de la base :

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \quad \text{pour certains } \lambda_k \in \mathbb{K}. \tag{1.1.1}$$

La notion de base peut être généralisée à tout espace vectoriel.

1.1.4 DÉFINITION (BASE DE HAMEL)
Un sous-ensemble $\mathscr{B}$ d'un espace vectoriel E est une *base de Hamel (ou base algébrique)* de E, si tout vecteur $x \in E$ peut être exprimé, de façon unique, comme une combinaison linéaire finie de certains éléments de $\mathscr{B}$: i.e. il existe des sous-ensembles finis $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset \mathscr{B}$ et $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} \subset \mathbb{K}$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \tag{1.1.2}$$

1.1.5 Exercice Montrer que chacune des deux affirmations suivantes donne une définition équivalente de la base de Hamel :

1. Une base de Hamel est un sous-ensemble linéairement indépendant maximal[1] $\mathscr{B} \subset E$.
2. Une base de Hamel est un sous-ensemble linéairement indépendant $\mathscr{B}$ de E qui *engendre* E, i.e.

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{B}) := \Big\{x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : \ \lambda_k \in \mathbb{K},\ x_k \in \mathscr{B},\ n \in \mathbb{N}\Big\},$$

coïncide avec E.

1. l'indépendance linéaire signifie que tout *sous-ensemble fini* de $\mathscr{B}$ est linéairement indépendant dans le sens habituel i.e. si une somme finie $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ pour certains $\lambda_k \in \mathbb{K}$, $x_k \in \mathscr{B}$, $n \in \mathbb{N}$, alors $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Comme nous n'avons aucune topologie sur E, il faut tenir compte seulement des sommes finies dans (1.1.2). Cette exigence est trop forte, ce qui rend les bases de Hamel peut intéréssantes dans la pratique. Nous reviendrons sur une autre notion de base (topologique), celle des bases de Schauder.

1.1.6 THÉORÈME
Tout espace vectoriel admet une base de Hamel.

Pour un espace de dimension finie E, ce résultat est généralement prouvé en algèbre linéaire à l'aide d'une récurrence. On rajoute à chaque étape un élément du complémentaire du Vect des vecteurs déjà construits jusqu'à recouvrir l'espace E. Cet argument peut être utilisé en dimension infinie où la récurrence habituelle est remplacée par *la récurrence transfinie*. la récurrence transfinie est mieux appréhendée avec le lemme de Zorn.

1.1.7 EXEMPLE. Nous considérons quelques exemples d'espaces vectoriels donnée dans la section 1.1.2.

1. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$.
2. $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$, les monômes $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ forment une base.
3. $\dim(\mathbb{K}[X]) = \infty$, le système de monômes $\{1, x, x^2, \dots\}$ forme une base de Hamel.
4. $\dim(c_{00}) = \infty$, les suites $e_n = (\delta_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ est le symbole de Kronecker, forment une base de Hamel de c_{00}.

1.1.8 REMARQUE
Malheureusement, mise à part des espaces comme $\mathbb{K}[X]$ ou c_{00} (qui sont isomorphes - pourquoi ?) aucune construction explicite de base de Hamel n'est connue en générale pour les espaces vectoriels de dimension infinie. Il serait intéréssant d'avoir une construction d'une base de Hamel de $C[0,1]$, par exemple. D'autre part, les bases Hamel sont généralement non dénombrables (voir les conséquences du Théorème de Baire).

1.1.5 Ensembles ordonnés, lemme de Zorn

1.1.9 DÉFINITION
Soit X un ensemble. Une relation binaire R sur X est un sous-ensemble de $X \times X$. Si $(x,y) \in X \times X$, on écrit souvent xRy pour signifier $(x,y) \in R$ On dit que R est une *relation d'ordre*, ou tout simplement un *ordre*, si elle vérifie les conditions suivantes :

1. R est réflexive : xRx pour tout $x \in X$.
2. R est antisymérique : si xRy et yRx, alors $x = y$.
3. R est transitive : si xRy et yRz, alors xRz.

Traditionnellement, on note une relation d'ordre par le symbole $\leq$, où bien $\preceq$. Un couple $(X, \leq)$ composé d'un ensemble X et un ordre $\leq$ sur X est appelé *ensemble ordonné*.

1.1.10 DÉFINITION
Un ordre $\leq$ sur un ensemble X est dit *total* si deux éléments quelconque de X sont comparables :

$$\forall x, y \in X, \quad x \leq y \text{ ou bien } y \leq x.$$

Dans ce cas, on dit aussi que l'ensemble $(X, \leq)$ est *totalement ordonné.*

1.1.11 EXEMPLE. La droite réelle $\mathbb{R}$, munie de l'ordre usuel, est totalement ordonnée.

1.1.12 EXEMPLE. Soit X ensemble quelconque. L'ensemble $\mathscr{P}(X)$ de toutes les parties de X est (partiellement) ordonné par la relation d'inclusion : $A \leq B \iff A \subseteq B$. Si $|X| \geq 2$, l'ordre ci-dessus n'est pas total : il y a toujours au moins deux sous-ensembles $A, B \subseteq X$ qui ne sont pas comparables : $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$.

1.1.13 DÉFINITION
Un élément x d'un ensemble ordonné X est dit *maximal* s'il n'y a pas d'éléments strictement plus grands que x i.e. $\forall y \in X, \ \ x \leq y \Rightarrow x = y$.

1.1.14 EXEMPLE. L'élément 1 est maximal dans le segment $[0, 1]$ muni de l'ordre usuel.

1.1.15 EXEMPLE. Soit V un espace vectoriel (sur un corps $\mathbb{K}$). Notons $\mathfrak{B}$ la famille de tous les sous-ensembles linéairement indépendents de V :

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{B} \quad \iff \quad & X \subseteq V \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}_+, \ \forall \lambda_i \in \mathbb{K}, \ \forall x_i \in X, \\ & i = 1, 2, \ldots, n, \ \ x_i \neq x_j \text{ pour } i \neq j, \\ & \text{si } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0, \text{ alors } \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0. \end{aligned}$$

Alors l'ensemble $\mathfrak{B}$, muni de la relation de l'inclusion, est (partiellement) ordonné, et un élément $X \in \mathfrak{B}$ est maximal si est seulement si X est une base de V (c.à.d. X n'est contenu dans aucun ensemble linéairement indépendent strictement plus grand).

1.1.16 Remarque
La notion d'élément maximal est différente de celle de plus grand d'élément. Dans l'exemple précedent, même si $\dim V = 1$, il n'existe aucun plus grand élément dans $\mathfrak{B}$, mais il existe plusieurs éléments maximaux.

1.1.17 Définition
Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné. Un sous-ensemble C de X est dit *chaîne* si la restriction de l'ordre $\leq$ sur C est un ordre total. En d'autres termes, pour tous $x, y \in C$ on a $x \leq y$, ou bien $y \leq x$.

1.1.18 Définition
Un ensemble ordonné X est dit *inductif* si toute chaîne $C \subseteq X$ est majorée i.e. il existe $x \in X$ tel que

$$\forall c \in C, \quad c \leq x$$

1.1.19 Théorème (Lemme de Zorn)
Tout ensemble non vide, ordonné et inductif possède au moins un élément maximal.

1.1.20 Exercice Montrer le lemme de Zorn dans le cas où X est démonbrable, en utilisant une récurrence .

Voilà une application typique du lemme de Zorn.

1.1.21 Théorème (de la base incomplète 1.1.6)
Tout espace vectoriel possède une base algébrique. On peut l'obtenir par extension de tout système libre.

Démonstration: Soit V un espace vectoriel quelconque sur un corps $\mathbb{K}$ et $\mathscr{B}_0$ un système libre de V. Soit Φ consiste de tous les sous-ensembles linéairement indépendents (libres) de V contenant $\mathscr{B}_0$. Φ n'est bien sûr pas vide, montrons qu'il est inductif. Soit $\mathscr{C}$ une chaîne dans Φ, c'est-à-dire $\mathscr{C}$ est une sous-famille de Φ qui est totalement ordonnée par la relation d'inclusion :

$$\forall A, B \in \mathscr{C}, \quad A \subseteq B \text{ ou } B \subseteq A.$$

Notons que $A \cup B$ appartient à $\mathscr{C}$ pour tous les $A, B \in \mathscr{C}$. Par induction finie, quelque soit $n \in \mathbb{N}$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{C}$, on a $\cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{C}$.

Posons $X = \cup\mathscr{C} = \cup\{A \colon A \in \mathscr{C}\}$. X contient $\mathscr{B}_0$, montrons que c'est un système libre. Soient $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tels que $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$. Supposons que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$. Il existe $A_i \in \mathscr{C}$ tels que $x_i \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. L'ensemble $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$ appartient à $\mathscr{C}$, et par conséquent A est libre. On en déduit : $\lambda_i = 0$ pour tous les $i = 1, 2, \ldots, n$. Ainsi Φ est inductif. D'après le lemme de Zorn, il possède au moins un élément maximal, $\mathscr{B}$. En d'autres termes, $\mathscr{B}$ est un sous-ensemble libre de V qui contient $\mathscr{B}_0$ et n'est contenu dans aucun autre ensemble libre. Il reste à monter est bien connu qu'un tel $\mathscr{B}$ est une base de V. Sinon, il existerait $x \in V \setminus \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B})$, alors $\mathscr{B}' = \mathscr{B} \cup \{x\}$ est un élément de Φ qui contient strictement $\mathscr{B}$, ce qui contredirait la maximalité de $\mathscr{B}$. ∎

1.1.6 Axiome du choix

Le lemme de Zorn est équivalent à l'énoncé suivant

1.1.23 Théorème (l'axiome du choix)
Soit $\Gamma = (E_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ensembles non-vides. Alors il existe une fonction $f \colon \Gamma \to \bigcup_{i \in I} E_i$ (appelée *fonction de choix*) telle que, pour tout $i \in I$, $f(E_i) \in E_i$.

1.1.24 Exercice Monter que l'axiome du choix est équivalent au fait que le produit d'ensemble non vide est un ensemble non vide.

Le résultat suivant, utilise l'axiome de choix de manière essentielle. On utilise le mot paradoxe pour le nommer, alors que c'est un *théorème,* bien établi, et ceci uniquement à cause de son caractère contre-intuitif.

Notons $B(a, r)$ la boule euclidienne de centrée en a et de rayon $r > 0$ de $\mathbb{R}^3$:

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \| x - a \| < r\}.$$

1.1.25 Théorème (le paradoxe de Banach-Tarski, (1924))
Soient r et R des nombres réells strictement positifs, $R > r$. Alors il existe des partitions finies des boules $B(a, r)$ et $B(a, R)$,

$$B(a, r) = \cup_{i=1}^{n} A_i \text{ et } B(a, R) = \cup_{i=1}^{n} A'_i$$

en n parties, telles que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, A'_i soit isométrique à A_i.

Il est donc possible de découper une boule petite comme un ballon en un nombre fini de morceaux, et de les rassembler de manière à obtenir une boule plus grande comme la terre. On peut essayer de réfuter le théorème ci-dessus en utilisant la notion de *volume* dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Le volume d'une boule B_r est donné par

$$\mathrm{vol}(B_r) = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

et le volume d'une réunion disjointe est égal à la somme des volumes. De plus, le volume est invariant par isométrie. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\pi r^3 &= \mathrm{vol}(B(0,r)) \\ &= \mathrm{vol}\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = \cup_{i=1}^n \mathrm{vol}(A_i) \\ &= \cup_{i=1}^n \mathrm{vol}(A_i') = \mathrm{vol}\left(\cup_{i=1}^n A_i'\right) \\ &= \mathrm{vol}(B(0,R)) = \frac{4}{3}\pi R^3,\end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse $r < R$. Est-ce vraiment une contradiction ? En fait, l'argument est faux, car le passage $\cup_{i=1}^n \mathrm{vol}(A_i) = \cup_{i=1}^n \mathrm{vol}(A_i')$ n'est possible que si les A_i sont eux-mêmes mesurables, dans ces partitions il y a certainement des A_i et donc A_i' qui ne sont pas mesurables.

Historiquement, ce paradoxe (qui n'en est pas un) a contribué au développement de la théorie des groupes en particulier celle des *groupes moyennables*.

1.2 Topologie

1.2.1 Définition

Soit X est un ensemble, une topologie τ sur X est un sous-ensemble de l'ensemble des parties de X, tel que :

1. $X \in \tau$ et $\in \tau$
2. τ est stable par réunion arbitraire i.e. si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de τ alors $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \tau$.
3. τ est stable par intersection finie i.e. si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de τ, avec I fini alors $\bigcap\limits_{i\in I} U_i \in \tau$.

Si (X, τ) est un espace topologique (i.e. un ensemble X muni d'une topologie τ), les éléments de τ sont les ouverts. On dit que $F \subset X$ est fermé, si son complémentaire est ouvert. Donc X et $\varnothing$ sont des fermés, et les fermés sont stables par intersection arbitraire et réunion finie.

1.2.2 EXEMPLE. • La topologie discrète sur un ensemble X est celle pour laquelle $\tau = \mathscr{P}(X)$, l'ensemble des parties de X. De manière équivalente, X est muni de la topologie discrète si les singletons sont des ouverts.

• La topologie grossière sur X est la topologie dont les seuls ouverts sont X et $\emptyset$.

On peut aussi définir un ordre entre les topologies d'un même espace X. On dira que la topologie τ_1 est plus fine que la topologie τ_2 si $\tau_2 \subset \tau_1$.

Le plus grand élément de l'ensemble des topologies est la topologie discrète et le plus petit est la topologie grossière.

1.2.3 DÉFINITION

Une base d'ouverts pour la topologie τ est un sous-ensemble $\mathscr{B}$ de τ tel que tout élément de τ soit réunion d'éléments de $\mathscr{B}$.

1.2.4 Exercice Par exemple, dans un espace métrique (voir plus loin), les boules ouvertes forment une base d'ouverts pour la topologie.

1.2.5 PROPOSITION (CRITÈRE POUR QU'UNE FAMILLE SOIT UNE BASE D'UNE TOPOLOGIE)

Soit X un ensemble. Soit $\mathscr{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ une partie de $\mathscr{P}(X)$.

Alors, $\mathscr{B}$ est la base de sa topologie engendrée, i.e. l'ensemble τ des unions d'éléments de $\mathscr{B}$ est la topologie engendrée par $\mathscr{B}$ si :

i) $X = \bigcup_{i \in I} B_i$ et

ii) $\forall B_i, B_j \in \mathscr{B}, \quad \forall x \in B_i \cap B_j, \quad \exists B_k \in \mathscr{B}, \quad x \in B_k \subset B_i \cap B_j.$

Démonstration: Il sagit de montrer que τ est une topologie. Comme, d'après la condition i), $X \in \tau$, il suffit de montrer que l'intersection de deux éléments de $\mathscr{B}$ est union d'éléments de B. Ceci découle de la condition ii). ■

1.2.7 DÉFINITION

Soit (X, τ) est un espace topologique. Si $A \subset X$, on appelle voisinage de A un sous-ensemble de X contenant un ouvert contenant A.

Si $x \in X$, un voisinage de $\{x\}$ est appelé voisinage de x. On note par $\mathscr{V}(x)$ l'ensemble des voisinage de x

---

1.2.8 REMARQUE

Un ensemble est donc ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points.

1.2.9 DÉFINITION
Une base de voisinages de x est une famille de voisinages de x telle que tout ouvert contenant x contienne un élément de la famille.

1.2.10 EXEMPLE. Par exemple, dans un espace métrique, les boules ouvertes de centre x ou les boules fermées de centre x et de rayon non nul forment une base de voisinages de x.

1.2.11 DÉFINITION
Un un espace topologique (X, τ) est *séparé* si pour $x, y \in X$, tels que $x \neq y$, il existe $U_x \in \mathscr{V}(x)$ et $U_y \in \mathscr{V}(y)$ tels que $U_x \cap U_y = \emptyset$.

1.2.12 EXEMPLE.
- •) La topologie grossière sur un ensemble ayant au moins deux éléments n'est pas séparée.
- •) Dans un espace séparé, les singletons sont fermés.
- •) Un espace métrique est séparé.

1.2.13 DÉFINITION (INTÉRIEUR, ADHÉRENCE ET DENSITÉ)
Soit (X, τ) un espace topologique. Soit $A \subset X$.

1. On dit que a est <u>intérieur</u> à A si on peut trouver un ouvert $U \in \tau$ tel que $a \in U$ et $U \subset A$. L'<u>intérieur</u> de A, noté $\overset{o}{A}$, est l'ensemble de ses points intérieurs. est le plus grand ouvert inclus dans A.
2. On dit que a est <u>adhérent</u> à A si tout ouvert $U \in \tau$ contenant a rencontre A. <u>L'adhérence</u> de A, notée $\overline{A}$, est l'ensemble des points adhérents à A.
3. On dit que a est un <u>point frontière</u> de A si tout ouvert $U \in \tau$ contenant a rencontre à la fois A et le complémentaire de A. <u>La frontière</u> de A, notée ∂A, est l'ensemble des points frontère de A.
4. On dit que A est <u>dense</u> dans X si $\overline{A} = X$.

1.2.14 Exercice
- i) Montrer que l'intérieur de A est le plus grand ouvert inclus dans A.
- ii) Montrer que l'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A.
- iii) Montrer que $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{o}{A}$.
- iv) Montrer que A est dense dans X si et seulement si $A \cap U \neq \emptyset$ quel que soit U ouvert non vide de X.
  Encore, A est dense dans X si et seulement si tout point de X admet au moins un point de A dans chacun de ses voisinages.
- v) Montrer que $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} = \overset{o}{\widehat{A \cap B}}$ et que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
  Qu'en général on a seulement $\overset{o}{A} \cup \overset{o}{B} \subset \overset{o}{\widehat{A \cup B}}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

Espaces séparables

1.2.15 DÉFINITION
Un espace est dit séparable s'il contient un sous-ensemble dénombrable et dense.

Grosso modo, un espace séparable n'est pas trop gros : à ne pas confondre avec séparé (1.2.11).
Un ensemble est au plus dénombrable s'il est fini ou s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$.

1.2.16 EXEMPLE. $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont séparables.
En effet, $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{Q}^n + i\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{C}^n$.

1.2.17 Exercice Montrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie est séparable.

1.2.18 PROPOSITION
Un espace topologique à base dénombrable d'ouverts est séparable.

Démonstration: En effet, si $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base d'ouverts, non vides, si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on choisit un x_n dans U_n, alors la partie $\mathbb{D} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense, car elle rencontre tout ouvert non vide. ∎

Continuité

1.2.20 DÉFINITION
Soit $f : X \to Y$ une application entre deux espaces topologiques, et soit $a \in X$. On dit que f est continue en a si pour tout voisinage V de $f(a)$, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a.
On dit que f est continue si elle est continue en tout point de X.

1.2.21 PROPOSITION
Soit $f : X \to Y$ une application entre deux espaces topologiques. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

f est continue.

L'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) est ouverte (resp. fermée).

On a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour tout $A \subset X$.

1.2.22 REMARQUE
i) Si $X = \bigcap_{i\in I} U_i$ est une réunion d'ouverts, et si $f : X \to Y$ est telle que les restrictions $f|_{U_i}$ sont continues, $f$est continue.

ii) Si $X = \bigcap_{j \in J} F_j$ est une réunion d 'un nombre fini de fermés, et si $f : X \to Y$ est telle que les restrictions $f|_{F_j}$ sont continues, f est continue.

1.2.23 DÉFINITION

Soit (X, τ_1) et (Y, τ_2) deux espaces topologiques. On dit qu'ils sont *homémorphes* s'il existe un *homémorphisme* entre eux i.e. une application $f : X \to Y$ bijective et continue et telle que l'inverse $f^{-1} : Y \to X$ soit continu i.e. f est une bijection qui induit une bijection de τ_1 sur τ_2.

Filtres

Dans un espace métrisable (i.e. dont la topologie est induite par une métrique), les suites caractérisent les fermés, donc les ouverts, par suite la topologie de l'espace.

Dans un espace topologique général, ce n'est plus le cas. Si par exemple $\mathbb{R}$, est munit de la topologie τ_1, dont les ouverts sont : l'ensemble vide, et toute partie dont le complémentaire est dénombrable (ou fini). Soit (x_n) une suite convergente vers a pour la topologie τ_1. Alors $U = (\mathbb{R} \setminus \{x_n / n \in \mathbb{N}\}) \cup \{a\}$ est voisinage ouvert de a, d'où il existe $N > 0$ tel que $x_n \in U$. Ceci n'est possible que si la suite est stationnaire, égale à a à partir d'un certain rang.

Dans, la topologie discrète τ_2, les suites convergentes sont aussi les suites stationnaires.

Mais, ces deux topologies ne sont pas identiques : par exemple un singleton est ouvert pour τ_2, mais ne l'ai pas pour τ_1 (à vérifier !). Ainsi, ces deux espaces *topologiques* ont mêmes suites convergentes, mais pas les mêmes topologies.

En général, une topologie n'est pas nécessairement métrisable (i.e. induite par une métrique) ou à base dénombrable de voisinage, dans ce cas les suites ne suffisent pas pour caractériser la topologie. c'est pour cela que M. Fréchet à introduit les filtres.

1.2.24 DÉFINITION

Soit X un ensemble. Un filtre $\mathscr{F}$ sur X est une famille non vide de parties de X telle que :

i) $X \in \mathscr{F}$, mais, $\emptyset \notin \mathscr{F}$

ii) $\forall A, B \in \mathscr{F}$, alors $A \cap B \in \mathscr{F}$

iii) Si $A \in \mathscr{F}$, $A \subset B \subset X$, alors $B \in \mathscr{F}$

1.2.25 EXEMPLE. 1) L'ensemble $\mathscr{V}(x)$ des voisinages d'un point $x \in X$ est un filtre sur X.

2) Soit X un ensemble infini. Alors $\{A \in \mathscr{P}(X) \,|\, (X \setminus A) \text{ est fini}\}$ est un filtre sur X. (à vérifier)
Lorsque $X = \mathbb{N}$, on appelle ce filtre le *filtre de Fréchet*. On verra plus loin son lien avec les suites convergentes.

On peut définir une relation d'ordre sur les filtres. Soit $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux filtres sur X. On dit que $\mathscr{F}_1$ est plus fin que $\mathscr{F}_2$ si $\mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}_1$. On obtient ainsi une relation d'ordre sur les filtres d'un ensemble. En outre, cet ordre est inductif. En effet, si $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ est une chaîne de filtres , alors $\mathscr{F} = \bigcup_{i\in I} \mathscr{F}_i$ est encore un filtre qui est plus fin que tous les $\mathscr{F}_i$.

1.2.26 DÉFINITION
On dit que $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre sur X si c'est un filtre maximal pour l'inclusion.

D'après le lemme de Zorn, il existe toujours des ultrafiltres.
Maintenant, si $\mathscr{F}$ est un filtre sur X, en appliquant toujours le lemme de Zorn, on voit qu'il existe un ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur X qui est plus fin que $\mathscr{F}$.

1.2.27 Exercice Montrer qu'un filtre $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre si est seulement si $\forall A \in \mathscr{P}(X)$, $A \in \mathscr{F}$ ou bien $X \setminus A \in \mathscr{F}$.

on va voir maintenant l'analogie des filtre avec les suites.

1.2.28 DÉFINITION
Soit (X, τ) un espace topologique, $\mathscr{F}$ un filtre sur X et $x \in X$.

1) On dit que x est un point limite de $\mathscr{F}$ (ou que $\mathscr{F}$ converge vers x), si $\mathscr{F}$ est plus fin que le filtre $V(x)$ des voisinages de x.
2) On dit que x est un point d'adhérence de $\mathscr{F}$ s'il est adhérent à toute partie $A \in \mathscr{F}$ i.e. $x \in \bigcap_{A\in\mathscr{F}} \overline{A}$.

1.2.29 REMARQUE
Si X est séparé, alors la limite d'un filtre est unique. en effet, si $x \neq y$ alors ils possèdent des voisinages disjoints qui ne peuvent être tous les deux dans le filtre.

La proposition suivante met en évidence les similitudes des filtres avec les suites :

1.2.30 PROPOSITION

Soit (X, τ) un espace topologique.

1) Si $\mathscr{F}$ est un filtre qui converge vers x, alors x est point d'adhérence de $\mathscr{F}$.
2) Si x est point d'adhérence de $\mathscr{F}$, alors il existe un filtre plus fin que $\mathscr{F}$ qui converge vers x.
3) Si $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre et x est valeur d'adhérence de $\mathscr{U}$, alors x est un point limite de $\mathscr{U}$.

Démonstration: 1) En effet, si $A \in \mathscr{F}$, pour tout $O \in V(x)$, $A \cap O \neq \emptyset$, d'où est point d'adhérence de $x \in \overline{A}$.

2) Si x est point d'adhérence de $\mathscr{F}$, alors le filtre engendrepar $\mathscr{F}$ et $V(x)$ est plus fin que $\mathscr{F}$ et converge vers x.
3) D'après 2), il existe un filtre contenant $\mathscr{U}$ et qui converge vers x, c'est nécessairement $\mathscr{U}$ puisque c'est un ultrafiltre. ■