Université de Rennes 1
Département de Mathématiques Année 2014-2015

Master1 de Mathématiques
“Analyse hilbertienne et applications"
Feuille de TD n^{0}5

1 Calcul de transformées de Fourier

1. Calculer les transformées de Fourier de f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \begin{cases} \cos(2\pi x) & \text{si } |x| \leq \frac{1}{4} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} \sin(2\pi x) & \text{si } |x| \leq \frac{1}{4} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2. Soit f la fonction indicatrice de l'intervalle $[-1, 1]$.
   a) Calculer $\widehat{f}$ et $f \star f$.
   b) En déduire les transformées de Fourier des fonctions:
   $x \mapsto (2 - |x|)\mathbb{1}_{[-2,2]}$ et $x \mapsto \frac{\sin^2(2\pi x)}{x^2}$.

3. Calculer la transformée de Fourier de f définie par :
$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx$.

4. Soit $\lambda > 0$ on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) = e^{-\lambda|x|}$.
   a) Calculer la transformée de Fourier de f_λ.
   b) En déduire la transformée de Fourier de l'application $x \mapsto \frac{1}{1+4\pi^2 x^2}$.
   c) En déduire les valeurs des intégrales suivantes
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{(1 + x^2)^2} dx.$$

2 Equation de Laplace

Résoudre, en utilisant la transformation de Fourier par rapport à x, l'équation $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ où $y > 0$, avec $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = \lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} \phi(x, y) = 0$ et $\phi(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

3 Algèbre de convolution

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que pour tout $g \in L^1(\mathbb{R})$ on ait $g * f = g$.

2. Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$, l'équation $f * f = f$.

i) Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{F}(f) * \mathscr{F}(g) = \widehat{fg}$.

ii) On note $f_a(x) = \frac{\sin(\pi a x)}{\pi x}$. Déduire de la question précédente $f_a * f_b$, avec $a, b > 0$.

iii) Montrer que l'équation $f * f = f$, où $f \in L^2(\mathbb{R})$ admet une infinité solutions.

4 Opérateurs entre espaces de Hilbert

Exercice 1 *Soit (λ_n) une suite de nombres complexes et $L : \ell^2 \to \ell^2$ un opérateur linéaire défini par: pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $L(x)_n = \lambda_n x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

i) Montrer que L est normal (i.e. $LL^* = L^*L$.)

ii) Montrer que L est continu si et seulement si (λ_n) est bornée.

iii) Montrer que L est compact si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$.

iv) Montrer que L est de Hilbert-Schmidt si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2 < +\infty$.

v) On suppose que L est continu. Déterminer ses valeurs propres et son spectre.

Exercice 2 *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue.*
Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

i) $y : [0,1] \to \mathbb{C}$ est solution de l'équation différentielle $\begin{cases} y'' + f = 0 \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$

ii) $y = T(f)$ où $T : L^2([0,1];\mathbb{C}) \to L^2([0,1];\mathbb{C})$ définit par $T(f)(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)dt$ où
$$K(x,t) = \begin{cases} t(1-x) & \text{si } 0 \le t \le x \\ x(1-t) & \text{si } x \le t \le 1. \end{cases}$$

Exercice 3 *Soit $K : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $K(x,t) = \min(x,t) - xt$.*
Soit $T : L^2([0,1];\mathbb{C}) \to L^2([0,1];\mathbb{C})$ défini par, pour tout $f \in L^2([0,1];\mathbb{C})$, $T(f)(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)dt$.

i) Vérifier que T est un opérateur auto-adjoint.

ii) Déterminer les valeurs propres non nuls de T et les vecteurs propres associés.

iii) Déterminer $\|T\|$.

Exercice 4 *Soit T un opérateur linéaire sur $L^2([0,1])$ défini par: pour tout $x \in [0,1]$, $T(f)(x) = \int_0^1 e^{-|x-y|} f(y)\,dy$.*

i) Montrer que T est compact et que $\|T\| \le 1$.

ii) Soit $f \in C([0,1])$ et $g = T(f)$. Montrer que $g \in C^2([0,1])$ et que pour tout $x \in [0,1]$, $g''(x) - g(x) = -2f(x)$, $g(0) = g'(0)$ et $g(1) = -g'(1)$.

iii) Soit $g \in C^2([0,1])$ vérifiant $g(0) = g'(0)$ et $g(1) = -g'(1)$. En posant $f = -(g'' - g)/2$, montrer que $g = T(f)$.

iv) Montrer que ImT est dense dans $L^2([0,1])$ et en déduire que 0 n'est pas une valeur propre de T. Est-ce que $0 \in \sigma(T)$?

Exercice 5 *1. Soit H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert séparables de dimension infinie. Soient (e_n) et (f_n) des bases hilbertiennes de H_1 et H_2 respectivement. Soit $T : H_1 \to H_2$ une application linéaire continue telle qu'il existe $(a_{nm})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \subset \mathbb{K}$ telle que pour tout n, $T(e_n) = \sum_{m\in\mathbb{N}} a_{nm} f_m$.*

i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{m\in\mathbb{N}} |a_{nm}|^2 \le \|T\|^2$ et que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_{nm}|^2 \le \|T\|^2$.

ii) Donner un exemple d'une suite double $(a_{nm})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \subset \mathbb{K}$, tel que: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{m\in\mathbb{N}} |a_{nm}|^2 \le 1$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_{nm}|^2 \le 1$ et il n'existe pas de $T \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$ tel que $\langle T(e_n), f_m\rangle = a_{nm}$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$.