Université de Rennes 1
Département de Mathématiques Année 2014-2015

Master1 de Mathématiques
“Analyse hilbertienne et applications"
Feuille de TD n^{0}4

1 Orthogonalité

1. Soit E un espace de Hilbert et F_1 et F_2 deux sous-espace de E.
   (a) Montrer que $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$
   (b) Si de plus F_1 et F_2 sont fermés, montrer que $(F_1 \cap F_2)^\perp = \overline{F_1^\perp + F_2^\perp}$
2. Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n, muni du produit scalaire $\langle M, N\rangle = \mathrm{tr}({}^tMN)$.
   (a) Déterminer la norme de la matrice identité et de la matrice $M = (i + j)_{1\le i,j\le n}$
   (b) On note par $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques. Montrer $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et que $E = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$
   (c) Déterminer $\inf \left\{ \sum_{1\le i,j\le n} (a_{ij} - i - j)^2 |\, \text{où } A = (a_{ij}) \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \right\}$.

2 Dual et adjoint

1) Soit H un espace de Hilbert.
   (a) Soit $a \in H \setminus \{0\}$. Montrer que $\forall u \in H$, $d(u, \{a\}^\perp) = \frac{|<u,a>|}{\|a\|}$.
   (b) Soit $f \in H^* \setminus \{0\}$. Montrer que $\forall x \in H$, $d(x, \ker f) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$.
   (c) Soit F le sous-espace de $L^2([0, 1])$ défini par
   $F = \{f \in L^2([0, 1]), \int_0^1 f(x)\, dx = 0\}$. Montrer que F est un sev fermé de $L^2([0, 1])$ et calculer la distance de la fonction $f : x \mapsto e^x$ à F.
2) Soit H un espace de Hilbert, x_n et $x \in H$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:
   (a) $x_n \to x$
   (b) $x_n \rightharpoonup x$ et $\|x_n\| \to \|x\|$.
   (c) $\lim_{n\to+\infty}\langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$ uniformément pour tout $y \in H$ avec $\|y\| = 1$.
3) Soit $H = L^2([0, 1])$. Pour $f \in H$, on pose
$$Tf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$
   (a) Montrer que T est un opérateur continu sur H.
   (b) Calculer l'adjoint de T.

3 Isométrie, produit scalaire

1) Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $\Phi : H_1 \to H_2$ une application linéaire. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:
   a) $\|\Phi(u)\| = \|u\|$, pour tout $u \in H_1$.
   b) $< \Phi(u), \Phi(v) >=< u, v >$ pour tout $u, v \in H_1$.

   Soit Φ une isométrie linéaire. Montrer que:
   i) $\Phi(H_1)$ est un espace de Hilbert.
   ii) Si $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une base hilbertienne de H_1 alors $\Phi((e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ est une base hilbertienne de $\Phi(H_1)$.

2) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'une norme qui vérifie l'identité du parallélogramme: pour tout $u, v \in E$: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$. On définit l'application $f : E \times E \to \mathbb{C}$ par $f(u,v) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|u + i^k v\|^2$
On se propose d'établir que f est un produit scalaire de norme associée $\|.\|$ (théorème de Von Neumann).
Montrer que pour tout $u, v, w \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

(a) $f(u,u) = \|u\|^2$

(b) $f(u,v) = \overline{f(v,u)}$

(c) $f(u+v,w) = 2f(u,\frac{w}{2}) + 2f(v,\frac{w}{2})$

(d) $f(u,v) = 2f(u,\frac{v}{2})$

(e) $f(u+v,w) = f(u,w) + f(v,w)$

(f) $f(\lambda u, v) = \lambda f(u,v)$.

Conclure

3) Soit $h^1(\mathbb{N}) = \{a \in \ell^2(\mathbb{N}),\ \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |a_n|^2 < +\infty\}$. On pose pour tout $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ éléments de $h^1(\mathbb{N})$

$$< a, b >= \sum_{n=0}^{+\infty} (1+n^2) a_n \overline{b_n}.$$

(a) Montrer que l'application $< .,. >$ est un produit scalaire. Montrer $h^1(\mathbb{N})$ muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert.

(b) Montrer que $h^1(\mathbb{N})$ est dense dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

(c) Montrer que la boule unité fermée de $h^1(\mathbb{N})$ est compacte dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

4 Polynômes de Legendre

Sur $\mathbb{R}[X]$ on considère la forme bilinéaire: $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}[X]$ muni de cette forme bilinéaire est un espace préhilbertien.

2. Est-ce un espace de Hilbert? sinon quel est son complété?

3. En appliquant à la base $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, montrer qu'il existe une unique famille orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans laquelle P_n est un polynôme de degrés n et $\langle P_n, X^n\rangle > 0$.

4. En déduire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2([-1,1])$.

5. On définit le polynôme Q_n par
$$Q_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$
Montrer que Q_n est de degré n et a n racines simples dans $]-1,1[$.
Montrer que Q_n est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur à n et en déduire que $Q_n = \lambda_n P_n$.
Déterminer la valeur de $\|Q_n\|^2$ puis celle de λ_n. Enfin calculer $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.

6. Calculer $\displaystyle\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 dx$.

5 Polynômes

Soit $w(x) = x^{-\ln x}$. On considère l'espace de Hilbert $L^2_w([0,+\infty[) = \{f; f\sqrt{w} \in L^2([0,+\infty[)\}$, muni du produit scalaire $\langle u, v\rangle = \int_0^{+\infty} u(x)\overline{v(x)}x^{-\ln x}dx$.

1. Montrer que $\mathbb{R}[X] \subset L^2_w([0,+\infty[)$.

2. Soit $f(x) = \sin(2\pi \ln x)$, Vérifier que $f \in L^2_w([0,+\infty[)$.

3. On note u_n la fonction polynomiale $x \mapsto x^n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle u_n, f\rangle = 0$
En déduire que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas dense dans $L^2_w([0,+\infty[)$.