Université de Rennes
Département de Mathématiques Année 2014-2015

Master1 de Mathématiques
“Analyse hilbertienne et applications"
Feuille de TD n^{0}3

1 Normes d'applications linéaires

1. Soit $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|P\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |P(x)|$. Pour $a \in \mathbb{R}$ on définit la forme linéaire $\Phi_a : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par $\Phi_a(P) = P(a)$. Déterminer pour quels $a \in \mathbb{R}$, Φ_a est continue, et calculer $\|\Phi_a\|$ dans ce cas.
2. Soit $E = C([0,1];\mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans $[0,1]$. Montrer que la forme linéaire ϕ définie par $\phi(f) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f(a_n)$ est continue sur E, et que $\|\phi\| = 1$ et n'est pas atteinte.

2 Séries dans un Banach

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach.

1. Soit $L \in \mathscr{L}(E)$ telle que $\|L\| < R$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n L^n \in \mathscr{L}(E)$.
2. Soit $L \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $e^L := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{L^n}{n!}$ définit un élément de $\mathscr{L}(E)$.
3. Soient $L, L' \in \mathscr{L}(E)$ tels que $L \circ L' = L' \circ L$. Montrer que
$e^L \circ e^{L'} = e^{L'} \circ e^L$.
4. En déduire que, si $L \in \mathscr{L}(E)$ alors e^L est inversible et a pour inverse $e^{-L} \in \mathscr{L}(E)$.
5. Soit $L \in \mathscr{L}(E)$ telle que $\|L\| < 1$. Montrer qu'il existe $G \in \mathscr{L}(E)$ telle que $G^2 = I_E - L$.

3 Banach-Steinhaus

1. Soient $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme donnée par le sup des valeurs absolues des coefficients, et pour $n \in \mathbb{N}$, soit $T_n : P \mapsto P^{(n)}(0)$. Montrer que le théorème de Banach-Steinhaus ne s'applique pas dans ce cas.
2. Soit $a = (a_n)$ une suite de nombres réels ; on suppose que pour toute suite $b = (b_n)$ de l'espace c_0, la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge. En déduire que $a \in \ell^1$.
3. Soient E un espace vectoriel normé et $B \subset E$ tels que pour tout $\phi \in E'$, l'ensemble $\phi(B) = \{\phi(x), x \in B\}$ est borné dans $\mathbb{R}$. Montrer que B est borné.

4 Application bilinéaire

Soit E_1 un espace de Banach et soient E_2 et F deux espaces vectoriels normés. Soit $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire dont les applications partielles sont continues, c.-à-d. pour tout $x \in E_1$, l'application de E_2 dans F qui à y associe $B(x;y)$ est continue et pour tout $y \in E_2$, l'application de E_1 dans F qui à x associe $B(x;y)$ est continue. Montrer que B est continue sur $E_1 \times E_2$.

5 Graphe fermé

1) Soit E et F des espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. On suppose que pour toute suite (x_n) de E convergeant vers 0 et toute forme linéaire continue $f \in F'$, on a $\lim_{n\to\infty} f(T(x_n)) = 0$. Montrer que T est continue.
2) Soit F un sous-espace vectoriel de $C^1([0,1],\mathbb{R})$, tel que F soit fermé dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer que F est de dimension finie.

6 Espaces de suites

Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on pose $\|x\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_n|$.

1. Donner une c.n.s. sur la suite (a_n) pour que $\|.\|$ définisse une norme sur ℓ^∞.
2. Démontrer que $\|.\|$ n'est jamais équivalente à $\|.\|_\infty$ dans ℓ^∞.
3. Démontrer que $\|.\|$ n'est jamais une norme de Banach sur ℓ^∞.

7 Hahn-Banach

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $\phi, \phi_1, \ldots, \phi_n$, $n+1$ formes linéaires , telles que $\bigcap_{i=1}^n \ker \phi_i \subset \ker \phi$. Alors, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\phi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i$.

2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel fermé de E et $x_0 \in E \setminus F$.
   Montrer qu'il existe $\phi \in E'$ tel que $\phi|_F = 0$, $\|\phi\| \leq 1$ et $\phi(x_0) = d(x_0, F)$.

3. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose $E_\alpha := \{f \in C([-1,1], \mathbb{R})\ : f(0) = \alpha\}$. Montrer que E_α est une partie convexe dense de $L^2([-1,1], \mathbb{R})$. Montrer que pour $\alpha \neq \beta$: $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset$, mais qu'il n'existe aucune forme linéaire continue $\ell \in \left(L^2([-1,1], \mathbb{R})\right)'$ qui les séparent.

8 Topologie faible

a) Soit E un espace vectoriel normé.

   1) Soit $a \in E$. Montrer que la translation de vecteur a est un homéomorphisme de $(E,\ \sigma(E,\ E'))$ dans lui-même.
   2) Montrer que l'addition est faiblement continue de $E \times E$ dans E et que la multiplication par un scalaire est faiblement continue de $\mathbb{K} \times E$ dans E.

b) Soient E et F deux espaces vectoriels normés et T une application linéaire de E dans F. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

   1) T est continue de $(E,\ \|.\|)$ dans $(F,\ \|.\|)$.
   2) T est continue de $(E,\ \sigma(E,\ E'))$ dans $(F,\ \sigma(F,\ F'))$ (T est faiblement continue).
   3) T est continue de $(E,\ \|.\|)$ dans $(F,\ \sigma(F,\ F'))$.

9 Convergence faible

Soit $\{x_n\}$ une suite d'un espace vectoriel normé E. Montrer que:

(i) si $x_n \rightharpoonup x$ alors $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$ et $x \in \overline{\mathrm{conv}\{x_n\}}$.

(ii) la covergence forte entraîne la convergence faible, mais qu'en général la réciproque est fausse:
il n'y a pas équivalence entre ces notions de convergence pour ℓ^p pour $1 < p < +\infty$.

(iii) $x_n \rightharpoonup x$ dans ℓ^p pour $1 < p < +\infty$, si et seulement si $\{x_n\}$ est bornée et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_n(k) \to x(k)$, où $x(k)$ est la $k$ieme coordonnée de x.

(iv) Montrer que la suite $x_n = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{n}, 0, 0, \cdots)$ ne converge pas faiblement dans ℓ^∞.

10 Dualité

(i) Soit A un sous-espace vectoriel dense d'un evn E. Montrer que $A' = E'$.

(ii) Soit $1 < p_1 < p_2 < \infty$ et q_1 et q_2 les exposants conjugués de p_1 et p_2 respectivement.

   (a) Montrer que $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$.
   (b) Montrer que ℓ^{p_1} est dense dans ℓ^{p_2}.
   Que peut-on en déduire, en utilisant la question précédente, sur $(\ell^{p_1})'$ et $(\ell^{p_2})'$?

(iii) Montrer que $(C_0)' = (C_{00})' = \ell^1$.

11 Reflexivité

1. Démontrer que dans un evn réflexif E, toute forme linéaire $f \in E'$ réalise la norme. Autrement dit : $\exists x_0 \in E$, $\|x_0\| = 1$ tel que $\|f\| = |f(x_0)|$ (et donc, dans la définition de la norme $\|f\|$, le sup est aussi un max). Retrouver par cette méthode que ℓ^1 n'est pas réflexif.

2. Déduire de l'exercice précédent que l'espace de Banach $C([0,1], \mathbb{R})$ n'est pas reflexif. (on pourra considérer la forme linéaire définie par $L(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt$.)

3. Montrer que $C^1([0,1], \mathbb{R})$, muni de sa norme naturelle $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, n'est pas réflexif.
   (Indication : on pourra commencer par démontrer que l'espace $E = \{f \in C^1([0,1], \mathbb{R}) :\ f(0) = 0\}$ n'est pas réflexif avec la norme $\|f\| = \|f'\|_\infty$).