Université de Rennes
Département de Mathématiques Année 2014-2015

Master1 de Mathématiques
“Analyse hilbertienne et applications"
Feuille de TD n^{0}2

1 Espaces de suites

1) Montrer que l'ensemble c_{00} des suites de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ à support fini est dense dans $\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{K})$, pour $p \in [1,+\infty[$. En déduitre que $\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{K})$, pour $p \in [1,+\infty[$ est séparable.

2) Qu'en est-il de l'espace des suites bornées ℓ^∞, des suites convergentes c et des suites convergentes vers 0, c_0?

2 Image d'un filtre

Soient X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une application et $\mathscr{F}$ un filtre sur X.

1) Montrer que $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si pour toute partie A de X on a $A \in \mathscr{F}$ ou bien $X \setminus A \in \mathscr{F}$.

2) Montrer que l'image directe par f d'un ultrafiltre est un ultrafiltre i.e. $\{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathscr{F}\}$ est un ultrafiltre.

3) Montrer que si f est continue et $\mathscr{F}$ converge vers x alors $f(\mathscr{F})$ converge vers $f(x)$.

3 Exemples d'espaces compacts

a) Montrer que la sphère $\mathbb{S}^n = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_0^2 + ... + x_n^2 = 1\}$ de dimension n est compacte.

b) Considérons la relation d'équivalence sur $\mathbb{S}^n$ définie par $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ ou $x + y = 0$. L'espace quotient est l'*espace projectif réel* de dimension n et se note $\mathbb{RP}^n$. Soit p la projection canonique. Montrer que l'ensemble

$$\mathscr{O} = \{V \subset \mathbb{RP}^n,\ p^{-1}(V) \text{ est un ouvert de } \mathbb{S}^n\}$$

définit une topologie compacte sur $\mathbb{RP}^n$.

c) Montrer que $\|A\|^2 = \mathrm{Tr}\,({}^tAA)$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$; en déduire que $d(A,B) = \|B - A\|$ est une distance sur $M_n(\mathbb{R})$; montrer enfin que

$$O_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tAA = I\}$$

est compact.

4 Ensemble de Cantor

On note par $w_0(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x$ et $w_2(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x + \dfrac{2}{3}$ les homothéties sur $\mathbb{R}$ de rapport $\dfrac{1}{3}$ et de centre respectivement 0 et 1. On pose $C_0 = [0,1]$ et on définit par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = w_0(C_n) \cup w_2(C_n)$. l'ensemble $C = \bigcap_{n\geq 0} C_n$ est appelé ensemble de Cantor (triadique).
Soit $A = \{0,2\}^{\mathbb{N}}$. Un élément de A est une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $a_n = 0$ ou $a_n = 2$.
Montrer que l'application

$$\varphi : A \to [0,1] \text{ définit par } \varphi((a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

induit un homéomorphisme de A sur l'ensemble de Cantor C.
En déduire que C est un ensemble compact non dénombrable.

5 Espace de polynômes

On munit $\mathbb{R}[X]$ d'une norme $\|.\|$.

1) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré $\leq n$ est fermé et que son intérieur est vide.

2) Montrer que $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|.\|$ n'est pas un espace de Banach.

6 Théorème de Baire

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on ait $\lim_{n\to+\infty} f(nx) = 0$.
   Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et (a_n) une suite strictement croissante de nombre réels > 0 telles que :

   (a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

   (b) pour tout $x > 0$ on a $\lim_{n\to+\infty} f(a_n x) = 0$.

   Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. Soit f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = 0$.
   Montrer que f est un polynôme

7 Fonction de Weierstrass

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction (fonction de Weierstrass) définie de la manière suivante :
   pour tout $x \in \mathbb{Q} - \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{q}$, si $x = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} - \{0\}$ sont premiers entre eux et, pour tout $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$, enfin, $f(0) = 0$.

   Montrer f est continue en 0 et en tout point de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et qu'elle est discontinue en tout point de $\mathbb{Q} - \{0\}$.

2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction à valeurs réelles qui soit continue en tout point de $\mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

8 Séparabilité

Soit (X, d) un espace métrique compact.

1. Montrer que X est séparable.

2. Soit $Q = \{a_n \,|n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable et dense dans X.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $f_n : X \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = d(x, a_n)$.

   Montrer que si $x \neq y$ alors il existe n tel que $f_n(x) \neq f_n(y)$.

3. Montrer que si F est une partie dénombrable de $C(X, \mathbb{R})$, alors la sous-algèbre engendrée par F est séparable.

4. Montrer que $C(X, \mathbb{R})$ est séparable.

9 Théorème de Stone-Weierstrass

1. Soit $f \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_a^b f(t)t^n\, dt = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

2. Montrer qu'une fonction non constante de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et admettant une limite finie en $+\infty$ n'est pas limite uniforme de polynômes de $\mathbb{R}[x]$.

3. Soit E un espace compact. Soit f_i, $i = 1, \ldots, n$ une famille de n éléments de $\mathscr{C}(E, \mathbb{R})$ qui sépare les points de E. Montrer que E est homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}^n$.

10 Théorème d'Arzela-Ascoli

1. Soient E, F des espaces normés et (f_n) une suite d'applications de E dans F équicontinue en $a \in E$. Montrer que, si la suite $(f_n(a))$ converge vers b, alors $(f_n(x_n))$ converge également vers b, si (x_n) est une suite de E telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.
   La suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (1 + x)^n$ est-elle équicontinue?

2. Soient (E, d) un espace métrique et $\mathscr{H}$ une famille équicontinue d'applications de E dans $\mathbb{R}$. Montrer:

   (a) l'ensemble A des $x \in E$ pour lesquels $\mathscr{H}(x)$ est borné est ouvert et fermé.

   (b) soit E un compact et connexe et $x_0 \in E$ tel que $\mathscr{H}(x_0)$ soit borné. Montrer que $\mathscr{H}$ est relativement compact dans $\mathscr{C}(E, \mathbb{R})$.

3. On considère la suite de fonctions $f_n(t) = \cos(\sqrt{t + 4(n\pi)^2})$, $t \in [0, \infty[$.

   (a) Montrer qu'il s'agit d'une suite de fonctions équicontinues convergent simplement vers 0.

   (b) La suite (f_n) est elle relativement compacte dans $(\mathscr{C}([0, \infty[), \|.\|_\infty)$? Que peut-on en conclure à l'aide du théorème d'Arzela-Ascoli?