Université de Rennes 1
Département de Mathématiques

Master1 de Mathématiques
Année 2014-2015

**Analyse hilbertienne et applications**
**Feuille de TD n$^0$1**

# 1 Suites

1. Montrer qu'une suite de réels positifs qui ne tend pas vers $+\infty$ admet une sous-suite convergente.
2. Montrer que $\mathbb{N}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ (muni de sa valeur absolue).
3. Montrer qu'une suite de Cauchy converge si et seulement si elle admet une valeur d'adhérence. En déduire qu'un espace métrique compact est complet.
4. Montrer que si une suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}$ converge vers un irrationnel $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $|p_n| \to +\infty$.

# 2 Densité

Soit $E$ un espace métrique, $A \subset E$ un ouvert et $B \subset E$ une partie quelconque.

(a) Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

(b) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$.

(c) Si $B$ est dense dans $E$, alors $\overline{A \cap B} = \overline{A}$.

(d) Si $A$ et $B$ sont denses dans $E$, $A \cap B$ est dense dans $E$.

(e) Donner un exemple, avec $A$ non ouvert, de parties denses dont l'intersection n'est pas dense.

# 3 Cardinaux

1. Soient $X$ un ensemble et $F$ une partie dénombrable de $X$, telle que $X \setminus F$ soit infini. Montrer que $X$ est en bijection avec $X \setminus F$.
2. Soient $X$ et $Y$ deux ensembles. Montrer qu'il existe une injection de $X$ dans $Y$, ou bien une injection de $Y$ dans $X$ i.e. les cardinaux sont comparables. (on pourra considérer l'ensemble des $Z \in \mathscr{P}(X \times Y)$ dont les restrictions des projections sur $X$ et $Y$ soient injectives et appliquer le lemme de Zorn.)

# 4 Somme

Soit $E$ un espace vectoriel normé et soient $A, B \subset E$. On note $A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}$.

1. On suppose que $A$ est ouvert. Montrer que $A + B$ est un ouvert.
2. On suppose que $A$ un fermé et $B$ un compact. Montrer $A + B$ est un fermé.
3. Le résultat du 2) est-il toujours vrai si l'on suppose simplement $A$ et $B$ fermés ?

# 5 Distances ultramétriques

Une distance $d$ sur un ensemble $E$ est dite *ultramétrique* si elle vérifie $d(x,\ z) \leq \max(d(x,\ y),\ d(y,\ z))$ pour tous $x,\ y$ et $z$.

1. Dans un espace munit d'une distance ultramétrique, montrer que:
   (a) tout triangle est isocèle;
   (b) n'importe quel point d'une boule est le centre de cette boule;
   (c) étant données deux boules, soit elle sont disjointes, soit l'une est contenue dans l'autre;
   (d) les boules ouvertes sont fermées, et les boules fermées sont ouvertes;
   (e) une suite $(x_n)$ est de Cauchy si et seulement si $d(x_n,\ x_{n+1})$ tend vers 0.
2. Soit $X$ un ensemble. Pour $x,\ y \in X$, on pose $d(x,\ y) = 0$ si $x = y$ et $d(x,\ y) = 1$ si $x \neq y$. Montrer que $d$ est une distance ultramétrique sur $X$.
3. **Distance $p$-adique**. Soit $p$ un nombre premier. On considère la valuation $p$-adique $v_p : \mathbb{Q} \to [0,\ +\infty]$ définie de la manière suivante : pour $a \in \mathbb{Z}^*,\ v_p(a)$ est la puissance de $p$ dans la décomposition de $a$ en facteurs premiers, puis $v_p(a/b) := v_p(a) - v_p(b)$ ; enfin $v(0) := +\infty$. Pour $x,\ y \in \mathbb{Q}$, on note alors $d_p(x,\ y) = p^{-v_p(x-y)}$. Montrer que $d_p$ est une distance ultramétrique sur $\mathbb{Q}$. Comparer cette distance avec la distance usuelle. Montrer que tout voisinage $p$-adique de 0 est dense dans $\mathbb{Q}$ pour la distance usuelle.

4. **Séries formelles** Soit $E = \mathbb{K}[[X]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ (les éléments de $E$ sont les séries de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ avec $a_0,\ a_1,\ \cdots \in \mathbb{K}$). On considère la valuation $v:\ E \to [0,\ +\infty]$ définie par
$$v(0) := +\infty \text{ et si } S = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \neq 0,\ v(S) := \min\{n \in \mathbb{N}/a_n \neq 0\}.$$
Pour $S,\ T \in E$, on note alors $d(S,\ T) = 2^{-v(S-T)}$. Vérifier que $d$ est une distance ultramétrique sur $E$.

## 6 Hyperplans et formes linéaires

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé de dimension infinie.

1. Montrer que deux formes linéaires non nulles définissent les mêmes hyperplans si et seulement si elles sont proportionnelles.
2. Montrer qu'une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé.
3. Montrer que $E$ est de dimension infinie si et seulement s'il admet une forme linéaire non continue.

Soit $L : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle et $H := \ker L$ l'hyperplan associé à $L$.

1. Montrer que $E - H$ est dense dans $E$ et que $H$ est connexe.
2. Montrer que si $L$ est continue alors $E - H$ a exactement deux composantes connexes.
3. Supposons maintenant que $L$ ne soit pas continue.
   (a) Montrer que $H$ est dense.
   (b) En déduire que $\{x \in E|\ L(x) = 1\}$ est dense dans $E$.
   (c) Montrer que $E - H$ est connexe.

## 7 Normes sur les espaces de fonctions

Soit $E = \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1. On considère $N_p(f) := (\int_0^1 |f(x)|^p dx)^{1/p}$ pour $p = 1, 2$. Montrer que $N_1, N_2, N_\infty$ sont des normes sur $E$ et qu'elles ne sont pas équivalentes.
2. Quelle est l'adhérence (pour chacune de ces normes) du sous-espace $\mathscr{P}$ des fonctions polynomiales ?
3. Montrer que l'application $P \in (\mathscr{P}, N_\infty) \mapsto P' \in (\mathscr{P}, N_\infty)$ n'est pas continue.

## 8 Théorème de Dini

Soit $X$ un espace métrique compact et $f_n$, $n \geq 0$, une suite de fonctions continues sur $X$ à valeurs réelles. On suppose que la suite est décroissante : $\forall n,\ f_{n+1} \leq f_n$, et que $f_n$ converge simplement vers une fonction continue $f$. Montrer que la convergence est uniforme sur $X$.

## 9 Le cercle

Soient $\mathbb{T}$ le groupe quotient de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}$ et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ l'application de passage au quotient. Soient aussi $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ et $j : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ l'inclusion canonique.

a) Montrer que $\mathbb{T}$ et $\mathbb{S}^1$ sont homéomorphes.

b) La distance usuelle de $\mathbb{R}$ induit-elle une distance sur $\mathbb{T}$ ?

c) Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $2\pi$-périodique induit une fonction continue $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.

## 10 Distance sur la sphère

On note $\|.\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^3$, et $\mathbb{S}^2$ la sphère de rayon 1 centrée à l'origine. Si $p$ et $q$ sont deux points de $\mathbb{S}^2$, on note $C(p,\ q)$ l'ensemble des chemins $\gamma :\ [0, 1] \to \mathbb{S}^2$ qui sont $C^1$ par morceaux, et tels que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(0) = q$. On note $L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(s)\| ds$ la longueur d'un tel chemin, et on pose $d(p,\ q)\ := \inf\{L(\gamma)|\gamma \in C(p,\ q)\}$. On rappelle qu'un *grand cercle* de $\mathbb{S}^2$ est un cercle obtenu comme intersection de $\mathbb{S}^2$ avec un plan passant par l'origine de $\mathbb{R}^3$. Si $p$ et $q$ sont deux points de $\mathbb{S}^2$ qui ne sont pas antipodaux, on note $\gamma_{p,q}$ le plus court des deux arcs de grand cercles qui joignent $p$ à $q$. Si $p$ et $q$ sont des points antipodaux, on note $\gamma_{p,q}$ l'un quelconque des demi-grands cercles joignants $p$ à $q$.

1. Montrer que $d$ définit une distance sur $\mathbb{S}^2$ équivalente à celle induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que, quels que soient $p$ et $q$ sur $\mathbb{S}^2$, la distance $d(p,\ q)$ est égale à la longueur de l'arc $\gamma_{p,q}$.