Université de Rennes 1 — Master 1 de Mathématiques
Année 2013-2014 — ANAH : Analyse hilbertienne et applications

---

Examen
Jeudi 19 décembre 2013
Durée 2h
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Le barême est à titre indicatif.

[1]

---

**Exercice 1.** (3 pts)
Soit $(X,d)$ un espace métrique métrique non vide et complet.

1. Une intersection dénombrable d'ouverts denses est-elle toujours un ouvert ?

2. On suppose que $X$ est sans point isolé i.e. pour tout $x \in X$ et tout $\epsilon > 0$, $B(x,\epsilon) - \{x\} \neq \emptyset$. Montrer que $X$ n'est pas dénombrable.

---

**Exercice 2.** (3 pts)
On désigne par $C_0$ l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0, muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par : pour tout $v = (v_n) \in C_0$, $\|v\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |v_n|$.
Soit $\ell^1$ l'ensemble des suites réelles sommables, muni de la norme $\|u\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$, pour tout $u = (u_n) \in \ell^1$.

1. On fixe $u \in \ell^1$ et on note $\Phi_u$ l'application définie sur $C_0$ par $\Phi_u(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.
   Montrer que $\Phi_u$ est une forme linéaire continue sur $C_0$ et calculer sa norme.
2. Montrer que $\Phi : u \mapsto \Phi_u$ est une isométrie bijective de $\ell^1$ sur le dual $(C_0)'$ de $C_0$.
3. Quel est le dual topologique de $C_{00}$? où $C_{00}$ est le sous-espace de $C_0$ formé des suites nulles à partir d'un certain rang.

---

**Exercice 3.** (3 pts)
Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension infinie.

1. Rappeler la définition de la topologie faible sur $E$.
   Pour $x_0 \in E$, donner une base de voisinages de $x_0$ pour la topologie faible.
2. On note $S = \{x \in E \mid \|x\|_E = 1\}$ et $\overline{B} = \{x \in E \mid \|x\|_E \leq 1\}$.
   (a) Soit $x$ un point de l'adhérence de $S$ pour la topologie faible. Montrer que $x \in \overline{B}$.
   ( Indication : on pourra utiliser l'un des corollaires du théorème de Hahn-Banach)
   (b) Soit maintenant $x \in \overline{B}$ et $(f_1, \cdots, f_n)$ une famille de formes linéaires continues sur $E$. Montrer qu'il existe $y \in S$ tel que $f_i(x) = f_i(y)$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$.
   En déduire que $x$ est dans l'adhérence de $S$.
   (c) Conclure

1.

**Tournez la page S.V.P.**

3. Que dire si $E$ est de dimension finie ?

---

**Exercice 4.** (6 pts)

Soit $H = \{f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \mid \text{ mesurable telle que } \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 e^{-x} dx < +\infty\}$ muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx.$$

On définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n$ est un polynôme de degré $n$ et de coefficient dominant $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

2. Vérifier que $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$ et en déduire que $\mathbb{R}[X]$ est inclus dans $H$.

3. Montrer que $\langle X^k,L_n\rangle = \begin{cases} (-1)^n n! & \text{si} \quad k = n \\ 0 & \text{si} \quad k < n. \end{cases}$ En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormée de $H$.

4. On admet que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $H$. Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $H$.

5. Calculer $L_3$ et en déduire $\displaystyle\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 e^{-x} dx$.

---

**Exercice 5.** (6 pts)

On considère l'espace de Hilbert $H = L^2([0,2\pi], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire

$$\forall f,\ g\ \in H,\ \langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

1. Montrer que les $e_n(t) = \exp(int)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ forment une base hilbertienne de $H$.
2. Soit $T$ l'opérateur défini sur la base hilbertienne par $\forall n \in \mathbb{Z},\ T(e_n) = \dfrac{e_n}{1+n^2}$.
   Montrer que $T$ s'étend de façon unique en un opérateur linéaire continu de $H$ dans lui-même. Calculer $\|T\|$.
3. $T$ est-il inversible ?
4. Soit $P_n$ la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par $\{e_k,\ -n \le k \le n\}$. Montrer que $P_n \circ T$ est un opérateur compact.
5. Montrer que $P_n \circ T$ converge vers $T$ en norme d'opérateur. En déduire que $T$ est compact.
6. Déterminer le spectre de $T$.