Université de Rennes 1 | Master 1 de Mathématiques
Année 2013-2014 | ANAH : Analyse hilbertienne et applications

---

Corrigé succinct de l'examen

Exercice 1.

1. Si X était dénombrable, alors $X = \bigcup_{x\in X}\{x\}$ est une union énombrable de fermés, (les singletons sont des fermés dans un espace séparé) ; c'est aussi X un espace de Baire (car complet), il existe donc $x_0 \in X$ telle que $\{x_0\}$ soit d'intérieur non vide, donc x_0 est un point isolé, ce qui est une contradition.
2. Non, par exemple $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \bigcap_{r\in\mathbb{Q}}(\mathbb{R}-\{r\})$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un ouvert.

Exercice 2.

1. On a pour tout $u \in \ell^1$, $v \in C_0$ et $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N}|u_nv_n| \le \|u\|_1\|v\|_\infty$. En conséquence, la série $\sum u_nv_n$ est absolument convergente, donc convergente dans $\mathbb{R}$, et Φ_u est donc bien définie en tant qu'application de E dans $\mathbb{R}$. La linéarité de Φ_u découle de la bilinéarité du produit de deux réels, et l'inégalité ci-dessus montre que $|\Phi_u(v)| \le \|u\|_1\|v\|_\infty$. En conséquence, Φ_u est une forme linéaire continue de norme au plus $\|u\|_1$. Pour montrer l'égalité, on peut considérer pour tout $p \in \mathbb{N}$ la suite $(v_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n^{(k)} = 1$ si $n \le k$ et $u_n \ge 0$, $v_n^{(k)} = -1$ si $n \le k$ et $u_n < 0$, et 0 si $n > k$. Il est clair que $v^{(k)} \in C_0$ et que $\|v^{(k)}\|_\infty = 1$. De plus $\Phi_u(v^{(k)}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{k}|u_k|$ donc converge vers $\|u\|_1$ lorsque k tend vers l'infini. En conséquence, on doit avoir $\|\Phi_u\| \ge \|u\|_1$, puis, en vertu de ce que l'on a établi précédemment, $\|\Phi_u\| = \|u\|_1$.
2. D'après la question précédente, Φ est bien définie de ℓ^1 dans $(C_0)'$, et conserve la norme. La linéarité de Φ est évidente, ainsi que l'injectivité (puisque Φ conserve la norme).
   Reste à montrer la surjectivité. Pour ce, fixons $f \in (C_0)'$ et définissons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n = f(e_n)$ où e_n est la suite canonique de (C_0) (i.e. dont tous les termes sont nuls sauf celui de rang n qui vaut 1). On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n| = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}|f(e_n)|$. Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}|f(e_n)| = f(v^N)$ où v^N est la suite de F nulle à partir du rang $N+1$ et égale au signe de $f(e_n)$ sinon. En conséquence, on a toujours $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}|f(e_n)| \le \|f\|$ et la série $\displaystyle\sum_n u_n$ est donc absolument convergente. Autrement dit, $u \in \ell^1$. D'où f coincide avec Φ_u sur le sous-espace vectoriel de C_0 engendré par $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, i.e. C_{00}, qui dense dans C_0. Les formes linéaires f et Φ_u étant continues sur C_0, on en déduit qu'elles coincident sur C_0.
3. Par densité de C_{00} dans C_0, on a le dual topologique de C_{00} est égal à ce lui de C_0, d'où $(C_{00})' = \ell^1$.

Exercice 3.

1. Voir le cours
2. (a) Soit x_0 un point de l'adhérence de S pour la topologie faible. D'après l'un des corollaires du théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E'$ de norme 1 telle que $f(x_0) = \|x_0\|_E$. Soit x un point de $S \cap \{y \in E;\ |f(y - x_0)| < \epsilon\}$ (un tel point existe car x_0 est dans l'adhérence de S pour la topologie faible). On a $\|x_0\|_E = f(x_0) = f(x_0 - x) + f(x) < \epsilon + 1$. En faisant tendre ϵ vers 0, on conclut que $\|x_0\|_E \leq 1$.
   (b) Soit $x_0 \in \overline{B}$. Soit V un voisinage de x_0, il existe $(f_1,\ \cdots f_n)$ des formes linéaires continues sur E, et $\epsilon > 0$ tels que $\bigcap_{i=1}^n \{x \in E;\ |f_i(x - x_0)| < \epsilon\} \subset V$. Comme E est de dimension infinie, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^n \ker f_i$ n'est pas réduit à $\{0\}$. On choisit alors $u \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^n \ker f_i$, $u \neq 0$. L'application $\varphi : \lambda \mapsto \|x_0 + \lambda u\|_E$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, vérifie $\varphi(0) = \|x_0\|_E \leq 1$ et $\displaystyle\lim_{\lambda \to \infty} \varphi(\lambda) = +\infty$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\lambda_0) = 1$. Comme $f_i(x_0 + \lambda_0 u) = f_i(x_0)$ pour tout $i \in \{1,\ \cdots, n\}$, $x_0 + \lambda_0 u \in V \cap S$. D'où x_0 est dans l'adhérence de $\overline{B}$.
   (c) On a montré que l'adhérence de S pour la topologie faible était égale à la boule unité fermée $\overline{B}$.

Exercice 4.

1. On utilise la formule de Leibnitz : $(x^n e^{-x})^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (e^{-x})^{(i)} (x^n)^{(n-i)} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \frac{n!}{i!} e^{-x} x^i$.
   D'où $L_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $L_n(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \binom{n}{i} x^i = \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} \binom{n}{i} x^i$.
2. Notons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx$. On a $I_0 = 1$ et si $n \geq 1$, une intégration par parties donne $I_n = [-e^{-x} x^n]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = n I_{n-1}$. Une récurrence sur n donne $I_n = n!$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est un élément de H, par suite $\mathbb{R}[X] \subset H$.
3. Soit $(k,\ n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$. On a
$$\langle X^k, L_m \rangle = \int_0^{+\infty} x^k \frac{e^x}{n!} (x^n e^{-x})^{(n)} e^x dx = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} x^k \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) dx.$$
   On intègre par parties n fois (en dérivant à chaque fois x^k et en intégrant $\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^n)$). Comme les fonctions $\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}(e^{-x} x^n)$ avec $i = 1,\ \cdots, n$ s'annulent en 0 et tendent vers 0 en $+\infty$, on obtient
$$\langle X^k, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n} (x^k) e^{-x} x^n dx.$$
   Par conséquence, si $n > k$, $\frac{d^n}{dx^n}(x^k) = 0$, et donc $\langle X^k, L_n \rangle = 0$. Si $k = n$, d'après 2., on a $\langle X^n, L_n \rangle = (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = (-1)^n I_n = (-1)^n n!$. Par suite, pour $n > k$, $\langle L_k, L_n \rangle = 0$, car d'après 1., L_k est un polynôme de degré k et $\langle L_n, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \langle X^n, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} . (-1)^n n! = 1$. Ainsi, la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormée.

4. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est un polynôme de degré k, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Vect\ (1, \cdots, X^n) = Vect\ (L_0, \cdots, L_n)$, d'où $\mathbb{R}[X] = Vect\{L_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, comme $\mathbb{R}[X]$ est dense dans H, la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale, par suite c'est une base hilbertienne de H.
5. On utilisant la norme associée on a

$$\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 e^{-x} dx = \inf_{P\in\mathbb{R}_2[X]} \|X^3 - P\|^2 = |\langle X^3, L_3\rangle|^2$$

où $P_{\mathbb{R}_2[X]}$ est la projection orthogonale sur l'espace des polynômes de degré ≤ 2 (qui est de dimension 3). Or d'après 3., $\langle X^3, L_3\rangle = (-1)^3 3! = -6$, ainsi

$$\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 e^{-x} dx = |\langle X^3, L_3\rangle|^2 = 36.$$

Exercice 5.

1. Voir le cours
2. Par linéarité, T est defini de manière unique sur $F = Vect\{e_n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$: pour tout $f \in F$ $T(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n\rangle T(e_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n\rangle \frac{e_n}{1+n^2}$. (la somme est finie) et par orthonormalité

$$\|T(f)\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+n^2)^2} |\langle f, e_n\rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

D'où $\|T\| \leq 1$; d'autre part $T(e_0) = 1$, entraîne que $\|T\| = 1$.
Comme F est dense dans H, T s'étend de façon unique à H en un opérateur continu $T : H \to H$, de même norme, ainsi $\|T\| = 1$.
3. T n'est surjective : soit $g = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e_n}{1+n^2}$, comme $\|g\|^2 = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+n^2)^2} < +\infty$, d'où $g \in H$; g n'a pas d'antécédent, en effet, $T(f) = g$ entraîne pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle f, e_n\rangle = 1$ donc $f \notin H$.
4. P_n est un oprérateur compact car il est de rang fini ; en effet $ImP_n = Vect\{e_k, \ -n \leq k \leq n\}$ qui est de dimension $2n+1$.
5. On a pour tout $f \in H$, $\|T(f) - P_n \circ T(f)\|^2 = \displaystyle\sum_{|n|\geq n+1} \frac{1}{(1+k^2)^2} |\langle f, e_k\rangle|^2 \leq \frac{1}{(1+(n+1)^2)^2} \|f\|^2$ par suite $\|T - P_n \circ T\| \leq \frac{1}{(1+(n+1)^2)}$. Donc T est limite d'opérateurs compacts, c'est alors un opérateur compact.
6. L'ensemble des valeurs propres $\sigma_p(T) = \{\frac{1}{1+n^2} \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ et le spectre de T

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\} = \{\frac{1}{1+n^2} \,|\, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}.$$