Université de Rennes 1 Master 1 de Mathématiques
Année 2012-2013 ANAH : Analyse hilbertienne et applications

Examen
Lundi 17 décembre 2012
Durée 2h
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Le barême est à titre indicatif.

[1]

Exercice 1. (4 pts)
Soit $E = C([-1,1],\mathbb{R})$ et $\langle .,. \rangle$ la forme bilinéaire sur E définie par

$$\langle f,g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)(1-x^2)\, dx.$$

1. Vérifier brièvement que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $F := \{ax^2 + bx + c \,|\, a,b,c \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des applications polynomiales de degré ≤ 2. F est-t-il complet ?
3. Soit $f(x) = x^3$. Justifier l'existence de la projection orthogonale g de f sur F.
4. Déterminer g, puis la distance $d(f,F) = \|f - g\|$ de f à F.

Exercice 2. (3 pts)
Soit X un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ et Y un sous-espace vectoriel de X.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f \in X^* = \mathcal{L}(X,\mathbb{R})$. Montrer que si $f(x) < a$ pour tout $x \in Y$ alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in Y$.
2. On pose $Y^{\perp} := \{f \in X^* \,|\, f(x) = 0, \text{ pour tout } x \in Y\}$ et
$Y^{\perp\perp} := \{x \in X \,|\, f(x) = 0, \text{ pour tout } f \in Y^{\perp}\}$.
Montrer que $Y^{\perp}$ et $Y^{\perp\perp}$ sont des fermés.
3. Montrer que $\overline{Y} = Y^{\perp\perp}$.
(On pourra utiliser le théorème de séparation de Hahn-Banach)

Exercice 3. (4 pts)
Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définies par :
$f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$ et $g(x) = (1-x^2)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$.

a) Calculer les transformées de Fourier de f et g.

b) A l'aide de l'identité de Parseval, montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(2\pi y) - 2\pi y \cos(2\pi y)}{2\pi^3 y^3} \right)^2 dy = \frac{16}{15}$.

En déduire que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{(\sin x - x\cos x)^2}{x^6}\, dx = \frac{\pi}{15}$.

1.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 4. (3 pts)
Soit $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ muni du produit scalaire, $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$.

1. Montrer que $\langle f,g\rangle = \langle \mathcal{F}(f),\mathcal{F}(g)\rangle$ pour $f,g \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$
2. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $f \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Exprimer la transformée de Fourier de $g_t(x) := f(x+t)$ en fonction de celle de f.
3. Soit $f \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que $\|f\|_2 = 1$. Montrer que $\lim\limits_{t\to 0}\langle f,g_t\rangle = 1$.

Exercice 5. (3 pts)
Soit l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ muni du produit scalaire $\langle (x_n),(y_n)\rangle = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n\overline{y_n}$.
Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n a_n$ converge pour toute suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$.

On pose, pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$, $T_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{k} x_n a_n$.

i) Montrer, en utilisant le théorème de Banach-Steinhauss, que l'application $T : \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par $T(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} T_k(x)$ est une forme linéaire continue.

ii) Déduire de i) que $a \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$.

Exercice 6. (3 pts)
Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H.

1. Soit $L : H \to H$ l'application définie par $L(e_n) = e_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer L est continue et calculer sa norme.
   Montrer que $\|L + I\| = 2$
2. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} T(e_n) = 0$

Exercice 7. (3 pts)
Soit H un espace de Hilbert et $S \in \mathcal{L}(H)$ inversible tel que $\|S\| \le 1$ et $\|S^{-1}\| \le 1$.

1. Rappeler la définition de $\sigma(S)$, le spectre de S.
2. Montrer que $\sigma(S) \subset \mathbb{T}$
   où $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.
3. Montrer que S est unitaire i.e. $SS^* = S^*S = I$.