Corrigé succinct de l'examen

Exercice 1.

$$\langle f,g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)(1-x^2)\, dx.$$

1. Vérifier brièvement que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. F est un espace vectoriel de dimension 3 ; il est donc complet.
3. Soit $f(x) = x^3$, F étant un sous-espace vectoriel complet d'un espace préhilbertien, d'après le théorème de la projection, la distance $d(f,\, F)$ est atteinte en la projection orthogonale de f sur F ; ainsi il existe un et un seul $g \in F$ tel que $d(f,\, F) = ||f-g||$.
4. Ce g est caractérisé par : $g \in F$ et $f - g \perp F$ i.e.

$$\begin{cases} g & = ax^2+bx+c \\ \langle f,\, 1\rangle & = a\langle x^2,1\rangle + b\langle x,\, 1\rangle + c\langle 1,1\rangle \\ \langle f,\, x\rangle & = a\langle x^2,\, x\rangle + b\langle x,\, x\rangle + c\langle 1,\, x\rangle \\ \langle f,\, x^2\rangle & = a\langle x^2,\, x^2\rangle + b\langle x,\, x^2\rangle + c\langle 1,\, x^2\rangle \end{cases} \iff \begin{cases} g & = ax^2+bx+c \\ 0 & = a\dfrac{4}{15} + c\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{4}{35} & = b\dfrac{4}{15} \\ 0 & = a\dfrac{4}{35} + c\dfrac{4}{15} \end{cases}$$

D'où $g = \dfrac{3}{7}X$ et $d(f,\, F)^2 = ||f||^2 - ||g||^2 = \dfrac{4}{63} - \left(\dfrac{3}{7}\right)^2 \dfrac{4}{15}$ i.e. $d(f,F) = \frac{4}{21}\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Exercice 2.

1. Puisque $f(0) = 0$, on a $0 < a$. Comme Y est un sous-espace vectoriel alors $-x \in Y$ si $x \in Y$. Donc, pour tout $x \in Y$, on a à la fois $f(x) < a$ et $-f(x) < a$. D'où $|f(x)| < a$. En remplaçant x par nx, on déduit que $|f(x)| < \frac{a}{n}$, pour tout $x \in Y$ et $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui entraîne, $f(x) = 0$, pour tout $x \in Y$.
2. On pose $Y^{\perp} := \{f \in X^* \mid f(x) = 0,\ \text{pour tout } x \in Y\}$ et
$Y^{\perp\perp} := \{x \in X \mid f(x) = 0,\ \text{pour tout } f \in Y^{\perp}\}$.
Montrer que $Y^{\perp}$ et $Y^{\perp\perp}$ sont des fermés. L'application $\phi_x : X^* \to \mathbb{R} : f \mapsto f(x)$ étant continue pour tout $x \in X$, $\phi_x^{-1}(\{0\})$ est fermé. D'où $Y^{\perp} = \displaystyle\bigcap_{x\in Y} \phi_x^{-1}(\{0\})$ est fermé. De même on montre que $Y^{\perp\perp}$ est aussi fermé.
3. Si $x \in Y$, on a $f(x) = 0$ pour tout $f \in Y^{\perp}$ et donc $Y \subset Y^{\perp\perp}$. Par suite, $\overline{Y} \subset Y^{\perp\perp}$ car $Y^{\perp\perp}$ est fermé. Si $\overline{Y}$ n'était pas égal à $Y^{\perp\perp}$, il existerait $y_0 \in Y^{\perp\perp} \backslash \overline{Y}$. On trouverait alors, d'après le théorème de séparation de Hahn Banach, $f \in X^*$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) < a < f(y_0)$, pour tout $x \in Y$. D'après 1., ceci entrainerait $f(x) = 0$ pour tout $x \in Y$, i.e. $f \in Y^{\perp}$. On aurait donc $f(y_0) = 0$, ce qui est en contradiction avec $0 < a < f(y_0)$.

Exercice 3.

a) $\hat{f}(y) = \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-2i\pi xy}dx = \left[\frac{e^{-2i\pi xy}}{-2i\pi y}\right]_{-1}^{1} = \frac{\sin(2\pi y)}{\pi y}$.

$\hat{g}(y) = \displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)e^{-2i\pi xy}dx = \hat{f}(y) - \int_{-1}^{1} x^2 e^{-2i\pi xy}dx.$

Une intégration par parties donne

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^{-2i\pi xy}dx = \frac{1}{4\pi^2}\left(-\frac{4\pi\sin(2\pi y)}{y} - 4\frac{\cos(2\pi y)}{y^2} + \frac{2\sin(2\pi y)}{\pi y^3}\right)$$

D'où $\hat{g}(u) = \dfrac{\sin(2\pi y) - 2\pi y\cos(2\pi y)}{2\pi^3 y^3}$

b) D'après l'identité de Parseval, $\displaystyle\int |\hat{g}(y)|^2 dy = \int |g(x)|^2 dx$, c'est-à-dire

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin(2\pi y) - 2\pi y\cos(2\pi y)}{2\pi^3 y^3}\right)^2 dy = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^2 dx = 2\int_{0}^{1}(1-2x^2+x^4)dx = 2\left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1$

ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin(2\pi y) - 2\pi y\cos(2\pi y)}{2\pi^3 y^3}\right)^2 dy = 2(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}) = \frac{16}{15}$.

Maintenant, avec le changement de variable $x = 2\pi y$, et d'après la parité de la fontion à intégrer :

$$\frac{16}{15} = 2\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{\sin x - x\cos x}{\frac{x^3}{4}}\right)^2 \frac{dx}{2\pi} = \frac{16}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{(\sin x - x\cos x)^2}{x^6}dx$$

d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\sin x - x\cos x)^2}{x^6}dx = \frac{\pi}{15}$

Exercice 4.

1. Utiliser l'identité de polarisation.
2. $\mathcal{F}(g_t)(y) = e^{2i\pi ty}\mathcal{F}(f)(y)$.
3. Soit $f \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que $\|f\|_2 = 1$.

$$\lim_{t\to 0}\langle f, g_t\rangle = \lim_{t\to 0}\langle \mathcal{F}(f),\, \mathcal{F}(g_t)\rangle = \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi ty}|\mathcal{F}(f)(y)|^2 dy$$

Comme $|e^{-2i\pi ty}|\mathcal{F}(f)(y)|^2| = |\mathcal{F}(f)(y)|^2$ et $|\mathcal{F}(f)|^2 \in L^1$; d'après le théorème de convergence dominée $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi ty}|\mathcal{F}(f)(y)|^2 dy = \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}}\lim_{t\to 0} e^{-2i\pi ty}|\mathcal{F}(f)(y)|^2 dy = \int_{\mathbb{R}}\lim_{t\to 0}|\mathcal{F}(f)(y)|^2 dy =$ $\|\mathcal{F}(f)\|_2^2$. D'où $\displaystyle\lim_{t\to 0}\langle f, g_t\rangle = \|\mathcal{F}(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 = 1$.

Exercice 5. Traité en TD

Exercice 6.

1. Soit $L : H \to H$ l'application définie par $L(e_n) = e_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer L est continue et calculer sa norme. Montrer que $\|L + I\| = 2$
   Correction : Pour tout $x \in H$ $\|L(x)\|^2 = \|x\|^2$, d'où L est une isométrie, donc $\|L+Id\| \leq \|L\| + \|Id\| = 2$. Soit maintenant $x_n = \sum_{k=0}^{n} e_k$; alors $\|x_n\| = \sqrt{n}$ et $\|L(x_n) + x_n\| = \| \sum_{k=1}^{n+1} e_k + e_n\| = \sqrt{4(n-1)+2}$. Comme $\|L + Id\| \geq \|L(x_n) + x_n\|/\|x_n\|$, on obtient, en faisant tendre n vers l'infini, la minoration $\|L+ \text{ Id } \| \geq 2$.
2. Sinon, on pourrait (pour un certain $\epsilon > 0$) extraire de (e_n) une sous-suite $(e_{\varphi(n)})$ tele que $\|Te_{\varphi(n)}\| > \epsilon$ pour tout n. Mais comme T est compact, on peut extraire de $(e_{\varphi(n)})$ une sous-suite (notée $(e_{\psi(n)})$ convergente. Si on note x sa limite, on a $\|x\| \geq \epsilon$. Alors $\|x\|^2 = \langle x,\, x\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Te_{\psi(n)}, x\rangle\ = \lim_{n\to\infty}\langle e_{\psi(n)}, T^*x\rangle\ = 0$ ce qui est une contradiction.

Exercice 7.

1. Voir le cours
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a l'équivalence $S - \lambda Id$ inversible $\Leftrightarrow Id\lambda S^{-1}$ inversible $\Leftrightarrow S^{-1} - \dfrac{1}{\lambda}Id$ inversible. Donc $\lambda \in \sigma(S) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(S^{-1})$. Comme $\|S\| \leq 1$, $\sigma(S)$ est inclus dans le disque-unité fermé. Mais c'est vrai aussi pour S^{-1}, et la remarque précédente implique que $\sigma(S) \subset \mathbb{T}$.
3. Pour tout $x \in H$, on a $\|S(x)\| \leq \|S\| \cdot \|x\| \leq \|x\| = \|S^{-1}(Sx)\| \leq \|S^{-1}\| \cdot \|Sx\| \leq \|Sx\|$, d'où $\|Sx\| = \|x\|$. On calcule ensuite $\langle S^*Sx,\, x\rangle = \langle Sx,\, Sx\rangle = \|Sx\|^2 = \|x\|^2 = \langle x,\, x\rangle$ et donc $\langle (S^*S-\ \text{Id})x,\, x\rangle = 0$ pour tout x. Comme S^*S- Id est auto-adjoint, l(identité de polarisation entraîne $S^*S - Id = 0$, donc $S^*S = Id$ i.e. S est unitaire.