Université de Rennes 1 | Master 1
Année 2014-2015 | ANAH (Analyse hilbertienne et applications)

---

Contrôle continu $n^o2$ corrigé

---

**Exercice 1.** Réponses :

1. Pour l'énoncé du théorème voir le cours, et pour le contre exemple, on peut citer celui donné en cours : L'application identité de $(C([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$ dans $(C([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_1)$ est une application linéaire continue bijective, mais n'est pas une application ouverte ; sinon $(C([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_1)$, qui n'est pas complet serait isomorphe à l'espace de Banach $(C([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$.
2. Il suffit de montrer $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \ell^3(\mathbb{N},\mathbb{C})$. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < +\infty$, alors pour $n$ assez grand $|a_n| \leq 1$, d'où $|a_n|^3 \leq |a_n|^2$ et par suite $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^3 < +\infty$.
   $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ n'est pas un fermé de $\ell^3(\mathbb{N},\mathbb{C})$ ; sinon par densité, de $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ dans $\ell^3(\mathbb{N},\mathbb{C})$, ces deux espaces seraient égaux ; ce qui n'est pas le cas :
   par exemple, la suite $(\frac{1}{\sqrt{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\ell^3(\mathbb{N},\mathbb{C})$, mais n'est pas un élément de $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$.
3. i) Voir le cours
   ii) $F \cap G = \{0\}$; sinon, il existerait un élément $x \in F \cap G$, tel que $\|x\| = 1$, comme $P_G(x) = x$ et $P_F(x) = x$ on aurait $P_F \circ P_G(x) = x$ par suite $\|P_F \circ P_G(x)\| = \|x\| = 1$, d'où $\|P_F \circ P_G\| \geq 1$, ce qui contraire à l'hypothèse $\|P_F \circ P_G\| < 1$.

---

**Exercice 2.** Réponses :

1) 1) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale $\Leftrightarrow \overline{Vect\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}} = E$.
   2) Soit $f \in E'$ telle que $f(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors, par linéarité, $f(Vect\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}) = \{0\}$ et par continuité $f(E) = f(\overline{Vect\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}}) \subset \overline{f(Vect\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\})} = \{0\}$.
   Réciproquement, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas totale, il existe un élément $x_0 \in E \backslash \overline{Vect\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}}$; alors, (voir TD), il existe $f \in E'$ telle que $f(x_0) = 1$ et $f(\overline{Vect\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}}) = \{0\}$.
2) $\ell^\infty$ n'admet pas de suite totale, car il n'est pas séparable.
3) L'existence de $g$ est un corollaire du théorème de Hahn-Banach, puisque $C_0$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty$. Pour l'unicité, on utilise le fait que $(C_0)' = \ell^1$, (voir TD), i.e. il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ telle que pour tout $x = (x_n) \in C_0$, $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ et $\|f\| = \|(a_n)\|_1$. En particulier, pour la suite canonique, $f(e_n) = a_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(e_n) = f(e_n) = a_n$, d'où pour tout $x = (x_n) \in \ell^\infty$,
   $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g(e_n)x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$, d'où l'unicité.

---

**Exercice 3.** Réponse :

1) Soient E un espace vectoriel normé et $f \in E'$, $f \not\equiv 0$. Soit $H = \{x \in E : f(x) = 0\}$,
   (a) Pour tous $x \in E$ et $y \in H$ on a $|f(x)| = |f(x) - f(y)| = |f(x - y)| \leq \|f\|\|x - y\|$ en passant à l'infimum sur $y \in H$, on obtient : $|f(x)| \leq \|f\| \inf_{y\in H} \|x - y\| = \|f\| \, d(x,H)$.
   (b) $f(x) - \frac{f(x)}{f(u)} f(u) = 0$, $y \in H$ et $d(x,H) \leq \|x - y\| = \|x - (x - \dfrac{f(x)}{f(u)} u)\| = \dfrac{|f(x)|}{|f(u)|}\|u\|$

(c) En passant au supremum sur $u \in E$, $\|u\| = 1$, dans l'inégalité de $(b)$ on aura $d(x,H) \leq \dfrac{|f(x)|}{\sup_{\|u\|=1} \frac{|f(u)|}{\|u\|}} = \dfrac{|f(x)|}{\|f\|}$ et de (a) on a $d(x,H) \geq \dfrac{|f(x)|}{\|f\|}$;
d'où $\forall x \in E$, $d(x,H) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$.

2) Soit $E = C_0 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, x_n \to 0\}$ que l'on munit de $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

(a) Comme $\ell^\infty$ est un espace de Banach, il suffit de montrer que $E$ est un fermé de $\ell^\infty$. Soit $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ un suite de $E$, telle que $\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = x$; il s'agit de montrer que $x \in E$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $k_0 > 0$ tel que $\|x - x^{(k)}\|_\infty < \epsilon$ pour tout $k \geq k_0$ i.e. $|x_n - x_n^{(k)}| < \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \geq k_0$. En particulier, $|x_n - x_n^{(k_0)}| < \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en passant à la limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$, on aura $\lim_{n\to+\infty} |x_n| < \epsilon$, comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, ceci entrîne $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, i.e. $x \in E$.

(b) $|f(x)| \leq \displaystyle\sum_1^\infty \frac{|x_n|}{2^n} \leq \|x\|_\infty \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} \leq \|x\|_\infty$. Donc $f \in E'$ et $\|f\| \leq 1$. D'autre part, soit $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $x_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{si } n > k. \end{cases}$ Alors $x^{(k)} \in E$, $\|x^{(k)}\|_\infty = 1$ et $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} f(x^{(k)}) = \lim_{k\to+\infty} \sum_1^k \frac{1}{2^n} = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} = 1$; d'où $\|f\| = 1$; et d'après 1) (c),on a pour tout $x \in E$, $d(x,H) = \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \left| \displaystyle\sum_1^\infty \frac{x_n}{2^n} \right|$.

(c) $f$ n'atteint pas sa norme ; sinon il existerait $x \in E$, $\|x\|_\infty = 1$ et $|f(x)| = 1$, d'où $1 = |f(x)| \leq \displaystyle\sum_1^\infty \frac{|x_n|}{2^n} \leq \|x\|_\infty \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} = 1$ Ainsi $0 = \frac{1-|x_n|}{2^n}$, ce qui entraîne, puisque $|x_n| \leq \|x\|_\infty = 1$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| = 1$, ce qui contredit l'hypothèse $x \in E$.