Université de Rennes 1 | Master 1
Année 2014-2015 | ANAH (Analyse hilbertienne et applications)

Contrôle continu $n^o 2$
Mercredi 26 novembre 2014
Durée 1h
Documents et calculatrices interdits

Exercice 1. (6 pts)
Justifier vos réponses.

1. Énoncer le théorème de l'application ouverte.
   Donner un exemple d'application linéaire bijective et continue, entre deux espaces vectoriels normés, qui ne soit pas ouverte.
2. Montrer que $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^3(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

   $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est-il fermé dans $\ell^3(\mathbb{N}, \mathbb{C})$?
3. Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, F un sous-espace vectoriel fermé de H et P_F la projection orthogonale sur F.
   i) Enoncer deux propriétés qui caractérisent P_F.
   ii) Soit G un autre sous-espace fermé de E. On suppose que $\|P_F \circ P_G\| < 1$.
   Déterminer $F \cap G$.

Exercice 2. (6 pts)

1) Soit E un espace vectoriel normé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E
   1) Rappeler la définition d'une suite totale.
   2) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale si et seulement si pour tout $f \in E'$, $f(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ entraîne $f \equiv 0$.
2) $\ell^\infty = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ tel que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}$. munit de $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ admet-il une suite totale ?
3) Montrer que toute forme linéaire continue f sur $C_0 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid x_n \to 0\}$ a une unique extension g à ℓ^∞ telle que $\|g\| = \|f\|$.

Exercice 3. (8 pts)

1) Soient E un espace vectoriel normé et $f \in E'$, $f \not\equiv 0$. Soit $H = \{x \in E : f(x) = 0\}$,
   (a) Vérifier que $|f(x)| \leq \|f\|\, d(x,H)$, $\forall x \in E$.

(b) Soit $u \in E \backslash H$, en notant que $y = x - \frac{f(x)}{f(u)} u$ est dans H, montrer que

$$d(x,H) \leq \frac{|f(x)|}{|f(u)|} \|u\|.$$

(c) Montrer que

$$\forall x \in E, \qquad d(x,H) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

2) Soit $E = C_0 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \to 0\}$ que l'on munit de $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

(a) Vérifier que $(E,\| \ \|_\infty)$ est un espace de Banach.

(b) Soient $f : E \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \sum_1^\infty \frac{x_n}{2^n}$ et $H = Ker f$.

Vérifier que $f \in E'$, donner une expression de $d(x,H)$.

(c) $\|f\|$ est-elle atteinte ?