Université de Rennes 1 | Master 1
Année 2013-2014 | ANAH Analyse hilbertiennes et applications

Contrôle continu $n^o 2$
lundi 02 décembre 2013
Durée 1h
Documents et calculatrices interdits

Exercice 1. (6 pts)

Justifier vos réponses.

1. Rappeler le Théorème de Hahn-Banach (extension par continuité).
   Donner un exemple de prolongement par continuité non unique pour $E = \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
   Indication : On pourra utiliser que $(\ell^1)' = \ell^\infty$.
2. Dire lesquels des sous-ensembles suivants est séparable
   (a) $(\ell^1,\|.\|_1)$
   (b) $(\ell^1,\|.\|_\infty)$
   (c) $(C([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$
   (d) $(\ell^\infty,\|.\|_\infty)$.
3. Montrer que ℓ^1 n'est pas reflexif

Exercice 2. (6 pts)

Soit H un espace de préhilbertien sur $\mathbb{C}$.

1. Montrer que le produit scalaire est une fonction continue de $H \times H \to \mathbb{C}$.
2. Soient $x_0, y_0 \in H$ fixés.
   Montrer que $F = \{z \in H \mid \langle z, y_0\rangle = \langle x_0, y_0\rangle\}$ est un fermé de H.
3. Soit A une partie de H. Rappeler la définition de $A^\perp$.
4. Peut-on avoir $A^\perp \neq A^{\perp\perp\perp}$?
5. Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ tel que pour tout $x \in H$, $\langle Tx,x\rangle = 0$.
   Monter que $T = 0$.

Exercice 3. (8 pts)

Soit $(C_{00},\|.\|_\infty)$ l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ à support fini i.e. $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_{00}$ alors il existe $N > 0$ tel que $x_n = 0$ si $n \geq N$.

i) Soit $f : C_{00} \times C_{00} \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire définie par $f(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$.
   a) Montrer que les applications : $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$ sont des formes linéaires continues.
   b) La forme bilinéaire f est-t-elle continue ?

ii) Soit $T : C_{00} \to C_{00}$ l'application linéaire défine par $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left(\frac{x_n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   1) Montrer que T est continue et bijective.
   2) Montrer que l'application T^{-1} n'est pas continue.
   3) Rappeler le théorème d'isomorphisme de Banach et conclure.