Université de Rennes 1 Master 1
Année 2013-2014 ANAH Analyse hilbertiennes et applications

Contrôle continu $n^o 2$
Corrigé

Exercice 1. (6 pts)

1. Rappeler le Théorème de Hahn-Banach.
2. Pour tout $f \in (\ell^1)'$, il existe un unique $a = (a_n) \in \ell^\infty$ tel que $f((x_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ et $\|f\| = \|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. On notera $f = f_a$.
   Si $F = Vect(e_0)$ et $f_0(te_0) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. On aura $\|f_0\| = 1$.
   Si $a_1 = (1,\frac{1}{2},0,\ldots,0,\ldots)$, $f_{a_1} \in (\ell^1)'$, $\|f_{a_1}\| = 1$ et$(f_{a_1})_{|F} = f_0$.
   De même pour $a_2 = (1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},0,\ldots,0,\ldots)$, $f_{a_2} \in (\ell^1)'$, et $\|f_{a_2}\| = 1$ et$(f_{a_2})_{|F} = f_0$.
   Ainsi on a deux extensions par continuité de f_0, qui sont différentes, puisque par exemple $f_{a_1}(e_2) = 0$ alors que $f_{a_2}(e_2) = \frac{1}{3}$.
3. $(\ell^1,\|.\|_1)$, $(\ell^1,\|.\|_\infty)$ et $(C([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$ sont des espaces séparables, mais, $(\ell^\infty,\|.\|_\infty)$ ne l'est pas.
4. Montrer que ℓ^1 n'est pas réflexif : Sinon $(\ell^1)'' = (\ell^\infty)'$ serait isomorphe à ℓ^1 et donc séparable, ce qui entraînerait que ℓ^∞ est séparable, d'où contradiction.

Exercice 2. (6 pts)

Soit H un espace de préhilbertien sur $\mathbb{C}$.

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$ d'où la continuité.
2. Soient $x_0, y_0 \in H$ fixés.
   Montrer que $F = \{z \in H \,|\, \langle z, y_0\rangle = \langle x_0, y_0\rangle\} = \{z \in H \,|\, \langle z - x_0, y_0\rangle = 0\} = Vect\{y_0\}^\perp + x_0$ est donc un fermé de H.
3. $A^\perp = \{z \in H \,|\, \langle z, y\rangle, \forall y \in A\}$
4. On a toujours $B \subset B^{\perp\perp}$.
   Si $B = A$, on aura $A \subset A^{\perp\perp} \implies A^{\perp\perp\perp} \subset A^\perp$.
   Si $B = A^\perp$, on aura $A^\perp \subset (A^\perp)^{\perp\perp} = A^{\perp\perp\perp}$.
   Ainsi $A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$.
5. Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ tel que pour tout $x \in H$, $\langle Tx,x\rangle = 0$.
   Alors pour tout x et y, on a $0 = \langle T(x+y),x+y\rangle = \langle Tx,x\rangle + \langle Tx,y\rangle + \langle Ty,x\rangle + \langle Ty,y\rangle = \langle Tx,y\rangle + \langle Ty,x\rangle$ d'où $\langle Tx,y\rangle = -\langle Ty,x\rangle$
   $0 = \langle T(x+iy),x+iy\rangle = \langle Tx,x\rangle + \langle Tx,iy\rangle + \langle Tiy,x\rangle + \langle Tiy,iy\rangle = -i\langle Tx,y\rangle + i\langle Ty,x\rangle$ d'où $\langle Tx,y\rangle = \langle Ty,x\rangle$.
   Ainsi $\langle Tx,y\rangle = 0$ pour tout $x,y \in H$, en particulier pour $y = Tx$ on aura $\|Tx\| = 0$ i.e. $Tx = 0$.

Exercice 3. (8 pts)

Soit $(C_{00},\|.\|_\infty)$ l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ à support fini i.e. $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in C_{00}$ alors il existe $N>0$ tel que $x_n=0$ si $n\geq N$.

i) Soit $f : C_{00}\times C_{00}\to\mathbb{R}$ la forme bilinéaire définie par $f(x,y)=\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$.

a) Montrer que les applications : $x\mapsto f(x,y)$ et $y\mapsto f(x,y)$ sont des formes linéaires continues. i) Soit $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in C_{00}$ fixé. Pour tout $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in C_{00}$ on a $|f(x,y)|\leq\|x\|_\infty\sum_{n\in\mathbb{N}}|y_n|$. D'où l'application linéaire $x\mapsto f(x,y)$ est continue et de norme $\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}|y_n|$ (qui est une somme finie).

De la même manière on montre que l'application linéaire $y\mapsto f(x,y)$ est continue et de norme $\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ (qui est une somme finie).

b) f n'est pas continue. Sinon il existerait une constante $C>0$, telle que pour tous $x,y\in C_{00}$ on aurait $|f(x,y)|\leq C\|x\|_\infty\|y\|_\infty$

Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on pose $x(k)_n=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{n+1}} & \text{si } n\leq k\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Alors, $\|(x(k)_n)\|_\infty=1$, et $f((x(k)_n),(x(k)_n))=\displaystyle\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n+1}\leq C$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ ce qui est absurde puisque la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n+1}$ diverge.

ii) Soit $T : C_{00}\to C_{00}$ l'application linéaire défine par $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}})=\left(\dfrac{x_n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

1) T est linéaire et vérifie pour tout $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in C_{00}$, $\|T((x_n))\|_\infty\leq\|(x_n)\|_\infty$ elle est donc continue. Soit $x=(x_n)\in\ker T$, alors $\left(\dfrac{x_n}{n+1}\right)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, ce qui donne $x=0$. D'où l'injectivité de T.

Soit $y=(y_n)\in C_{00}$, on a $T\left(((n+1)y_n)_n\right)=y$, ainsi T est surjective et par suite bijective. L'application inverse est donnée par $T^{-1}(x_n)=\left(((n+1)y_n)_n\right)$.

2) En effet, T^{-1} n'est pas continue, puisque la suite $T^{-1}(e_k)=k+1$ n'est pas bornée alors $\|e_k\|_\infty=1$ l'est.

3) Ceci ne met pas en défaut le théorème d'isomorphisme de Banach car C_{00} n'est pas complet.