Contrôle continu $n^o 2$

mercredi 21 novembre 2012

Durée 1h

Documents et calculatrices interdits

Exercice 1. (7,5 pts)

Justifier (succintement) vos réponses.

1. Enoncer le théorème de représentation de Riesz pour les espaces de Hilbert.
2. Un espace vectoriel normé reflexif est-il un espace de Banach ?
   Un espace de Banach est-il reflexif ?
3. Dire lesquels des espaces suivants sont séparables ?
   (a) $\mathbb{R}^4$
   (b) $\ell^8(\mathbb{N},\mathbb{C})$
   (c) $A = \{(x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C}) \,|\, x_{2013} = 0\}$
   (d) $C_0 = \{(x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C}) \,|\, \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}$
4. Soit $(H,\langle,\rangle)$ un espace de Hilbert et $x,y \in H$ tels que $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $\langle x,y\rangle = 0$.

Exercice 2. (4,5 pts) Soit l'espace de Hilbert $H = L^2([0,1])$ muni du produit scalaire,

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\,\overline{g(x)}\,dx.$$

1. Trouver $a,b \in \mathbb{R}$ telle que l'application $g : x \mapsto g(x) = ax + b$ soit de norme 1 et orthogonale à la fonction constante égale à 1.
2. Soit $c > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \sin(cnx)$. Déterminer $c > 0$ pour que f_n et f_{n+1} soit orthogonales.
   Montrer qu'alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est orthogonale.

Exercice 3. (8 pts) Soit lespace de Hilbert $H = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ muni du produit scalaire $\langle (u_n),(v_n)\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\overline{v_n}$.

1. Montrer que l'application $f : H \to \mathbb{C}$ définie par $f((u_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{n+1}$ est une forme linéaire continue et déterminer sa norme.
   (on rappelle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

2. En déduire que $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H; \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{n+1} = 0\}$ est un fermé de H.

On considère le sous-espace C_{00} de H des suites qui n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls i.e. $(u_n) \in C_{00}$ alors il existe $N > 0$ tel que $u_n = 0$ si $n \geq N$.

(i) C_{00} muni du produit scalaire de H, est-il un espace de Hilbert ?

(ii) Montrer que $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_{00}; \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{n+1} = 0\}$ est un sous-espace fermé de C_{00}.

(iii) Montrer que $F^{\perp} = \{0\}$.
Indication : on pourra utiliser pour tout $k \geq 1$, la suite (u_n) telle que

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ -(k+1) & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(iv) En déduire que $C_{00} \neq F \oplus F^{\perp}$.

(v) Le sous-espace $G = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H; \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{\sqrt{n+1}} = 0\}$ est-il fermé dans H ?