Université de Rennes 1
Année 2012-2013

Master 1
ANAH Analyse hilbertiennes et applications

---

# Contrôle continu $n^o 2$
# Corrigé

---

**Exercice 1.**

1. Enoncer le théorème de représentation de Riesz pour les espaces de Hilbert.
2. Un espace réflexif est un espace de Banach.
   La réciproque est fausse, $\ell^1$ est un espace de Banach qui n'est pas réflexif.
3. Dire lesquels des espaces suivants sont séparables ?
   (a) $\mathbb{R}^4$ est séparable, ( comme tout espace de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
   (b) $\ell^8(\mathbb{N},\mathbb{C})$ est séparable, ( comme tout $\ell^p$, $p \in [1,+\infty[$)
   (c) $A = \{(x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C}) \mid x_{2013} = 0\}$ n'est pas séparable car $\ell^\infty$ n'est pas séparable. En effet, $\ell^\infty = A \oplus vect\{e_{2013}\}$, et s'il existe une suite dense dans $A$, comme $vect\{e_{2013}\}$ est de dimension finie, il existerait une suite dense dans $\ell^\infty$, ce qui contredit $\ell^\infty$ non séparable.
   (d) $C_0 = \{(x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C}) \mid \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}$ est séparable.
4. $\|x+\lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ entraîne que $\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|x+\lambda y\| = \|x\|$ ainsi la distance de $x$ à $F = Vect\{y\}$ est égale à $\|x\|$ donc la projection orthogonale de $x$ sur $F = Vect\{y\}$ est 0 i.e. $x$ est orthogonal à $F = Vect\{y\}$, donc $\langle x,y\rangle = 0$.
   Autre démonstration : $\|x+\lambda y\|^2 \geq \|x\|^2$ , s'écrit $\mathfrak{Re}(\overline{\lambda}\langle x,y\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2 \geq 0$.
   Pour $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$, on aura $\lambda\mathfrak{Re}\langle x,y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0$ alors $\begin{cases} \mathfrak{Re}\langle x,y\rangle \geq -\lambda\|y\|^2 \text{ si } \lambda > 0 \\ \mathfrak{Re}\langle x,y\rangle \leq -\lambda\|y\|^2 \text{ si } \lambda < 0 \end{cases}$
   et en faisant tendre $\lambda$ vers 0, on obtient $\mathfrak{Re}\langle x,y\rangle = 0$.
   Le même raisonnement avec $i\lambda$ à la place de $\lambda$ donne $\mathfrak{Im}\langle x,y\rangle = 0$. Donc $\langle x,y\rangle = 0$.

---

**Exercice 2.**

1. $0 = \langle g,1\rangle = \int_0^1 (ax+b)\,dx = \frac{a}{2} + b$ donc $a = -2b$, et $1 = \|g\|^2 = \langle g,g\rangle = \int_0^1 (-2bx + b)^2\,dx = b^2\int_0^1 (2x-1)^2\,dx = \frac{b^2}{3}$ d'où $b = \pm\sqrt{3}$.
   Donc $a = -2\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{3}$ ou bien $a = 2\sqrt{3}$ et $b = -\sqrt{3}$.
2. On a $\langle f_n,f_{n+1}\rangle = \int_0^1 \sin(cnx)\sin(c(n+1)x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (\cos(cx) - \cos(c(2n+1)x))\,dx$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(c)}{c} - \frac{\sin(c(2n+1))}{c(2n+1))}\right)$. Par exemple $c = \pi$ convient.
   Dans ce cas, $\langle f_n,f_m\rangle = \int_0^1 \sin(\pi nx)\sin(\pi mx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (\cos(\pi x) - \cos(\pi mx))\,dx = 0$ donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est orthogonale.

**Exercice 3.** (8 pts)

1. On commence par écrire, $f((u_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \overline{(\frac{1}{n+1})} = \langle (u_n), (\frac{1}{n+1}) \rangle$ et remarquer que $\|(\frac{1}{n+1})\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty$, donc $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in H$
Alors, le théorème de Riesz permet de conclure que $f$ est une forme linéaire continue et que $\|f\| = \|(\frac{1}{n+1})\|_2 = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$.
2. $E = f^{-1}(\{0\})$ est un fermé, comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

(i) $C_{00}$ n'est pas fermé dans $H$, car c'est un sous-espace strict dense dans $H$, il n'est donc pas complet. $C_{00}$ n'est pas un espace de Hilbert.

(ii) $F = E \cap C_{00}$, c'est un fermé de $C_{00}$ comme intersection d'un fermé de $H$ avec $C_{00}$.

(iii) Soit $(v_n) \in C_{00}$, tel que $(v_n) \in F^\perp$. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ -(k+1) & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
est dans $F$, on a que $\langle (v_n), (u_n) \rangle = 0$ , donc $v_0 - (k+1)v_k = 0$ i.e. $v_k = \dfrac{v_0}{k+1}$.
Comme $(v_n) \in C_{00}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $v_n = 0$ pour tout $n \geq N$, en particulier $0 = v_N = \frac{v_0}{N+1}$. Donc $v_0 = 0$ et par conséquent $v_k = \frac{v_0}{k+1} = 0$ pour $k \geq 0$. Ainsi $(v_n)$ est nulle et par suite $F^\perp = \{0\}$.

(iv) La suite $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est dans $C_{00} \setminus F$ et $F^\perp = \{0\}$, d'où $F \oplus F^\perp = F \subsetneq C_{00}$.

(v) (Question Bonus :) $G = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H ; \sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{u_n}{\sqrt{n+1}} = 0\}$ est un sous-espace strict et dense dans $H$, il n'est donc pas fermé dans $H$.
En effet, soit $(u_n) \in H$ et $\epsilon > 0$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{n\geq N} |u_n|^2 \leq \frac{\epsilon^2}{2}$.
On pose $C = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \frac{u_n}{n+1}$ et pour $k \geq N$, $A_k = \displaystyle\sum_{n=N}^{k} \frac{1}{n+1}$. Soit $v(k)_n = \begin{cases} u_n & \text{si } 0 \leq n < N \\ \frac{-C}{A_k\sqrt{n+1}} & \text{si } N \leq n \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{v(k)_n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{u_n}{\sqrt{n+1}} + \frac{-C}{A_k} \sum_{n=N}^{k} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = C - \frac{C}{A_k} A_k = 0$. Donc $(v(k)_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$.
D'autre part, $\|(v(k)_n) - (u_n)\|_2^2 = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |v(k)_n - u_n|^2 = \sum_{n=N}^{k} |v(k)_n - u_n|^2 + \sum_{n>k} |u_n|^2 \leq$
$2\displaystyle\sum_{n=N}^{k} |v(k)_n|^2 + 2\sum_{n\geq N} |u_n|^2 \leq 2\sum_{n=N}^{k} \frac{|C|^2}{A_k^2(n+1)} + \epsilon^2 = \frac{|C|^2}{A_k^2} A_k + \epsilon^2 = \frac{|C|^2}{A_k} + \epsilon^2$. Comme $\lim_{k\to+\infty} A_k = +\infty$, on aura pour tout $\epsilon > 0$, $\lim_{k\to+\infty} \|(v(k)_n) - (u_n)\|_2 \leq \epsilon$ i.e. $\lim_{k\to+\infty} (v(k)_n) = (u_n)$ dans $H$. Comme $(u_n)$ est arbitraire dans $H$, par conséquent $H = \overline{G}$.