Université de Rennes 1 | Master 1
Année 2014-2015 | ANAH (Analyse hilbertienne et applications)

Contrôle continu $n^o 1$
Mercredi 15 octobre 2014
Durée 1h
Documents et calculatrices interdits

Exercice 1. (7 pts)
Justifier vos réponses.

1. Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E. Donner la définition de la norme induite par $\|.\|$ sur l'espace quotient E/F.
2. Soit X un espace de Baire. Une intersection dénombrable d'ouverts denses de X est-elle toujours un ouvert dense ?
3. Soit X un ensemble dénombrable et d une distance sur X tel que (X,d) soit compact. Montrer que X a un point isolé i.e. il existe $x \in X$ et $\epsilon > 0$, tel que $B(x,\epsilon) = \{x\}$.
4. Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties compactes. Montrer que $A + B$ est compact.
5. Soient X un ensemble (non vide) et $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur X.
   Montrer que si $A \cup B \in \mathscr{U}$ si et seulement si $A \in \mathscr{U}$ ou $B \in \mathscr{U}$.

Exercice 2. (6 pts)

1. Dire lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels denses de $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$, muni de la norme $\|(a_n)\|_2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
   (a) $V_1 = \{(a_n) \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) \,|\, a_{2014} \geq 0\}$.
   (b) $V_2 = \{(a_n) \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) \,|\, a_{2014} = 0\}$.
   (c) $V_3 = \{(a_n) \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) \,|\, |a_n| \leq \frac{1}{n+1}\}$.
   (d) $V_4 = \{(a_n) \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R}) \,|\, \sum_{n\in\mathbb{N}} |\sin(a_n)| < +\infty\}$.
2. Monter que $V_4 = \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
3. Montrer que V_3 est un compact.
   Déterminer l'intérieur de V_3.

Exercice 3. (7 pts) Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs complexes.

1) On munit E de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

(a) Montrer que $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.

(b) On note par N_∞ la norme induite par $\|.\|_\infty$ sur le quotient E/F.
Soit $\pi : E \to E/F$ la projection canonique.
Montrer que pour tout $f \in E$, on a $N_\infty(\pi(f)) = |f(0)|$.

(c) Montrer que l'application $\phi : E \to \mathbb{R}$, définie par $\phi(f) = f(0)$, induit par passage au quotient, un isomorphisme isométrique de E/F sur $\mathbb{R}$.

2) On munit maintenant E de la norme $\|.\|_1$ définie par $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$.

(a) $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ est-il fermé dans E?

(b) On note par N_1 la norme induite par $\|.\|_1$ sur le quotient E/F.
Que vaut $N_1(\pi(f))$ pour $f \in E$?