Université de Rennes 1 | Master 1
Année 2014-2015 | ANAH (Analyse hilbertienne et applications)

Contrôle continu $n^o 1$ corrigé

Exercice 1. Réponses :

1. voir le cours.
2. Non, par exemple $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}} (\mathbb{R} - \{r\})$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un ouvert.
3. $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ est une union énombrable de fermés, (les singletons sont des fermés dans un espace séparé) ; c'est aussi X un espace de Baire (car compact), il existe donc $x_0 \in X$ telle que $\{x_0\}$ soit d'intérieur non vide, donc x_0 est un point isolé.
4. L'application $\phi : E \times E \to E$, définie par $\phi(x,y) = x + y$ est continue, d'où $A + B = \phi(A \times B)$ est un compact, comme image du compact $A \times B$ par une application continue.
5. $\Rightarrow$ Si $A \notin \mathscr{U}$ et $B \notin \mathscr{U}$, comme $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre, on aura $A^c \in \mathscr{U}$ et $B^c \in \mathscr{U}$, d'où $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \in \mathscr{U}$, donc $A \cup B \notin \mathscr{U}$.
   $\Leftarrow$ Si $A \in \mathscr{U}$ alors $A \subset A \cup B$ entraîne $A \cup B \in \mathscr{U}$, puisque $\mathscr{U}$ est un filtre.
   De même si $B \in \mathscr{U}$.

Exercice 2. Réponses :

1. (a) $V_1 = \{(a_n) \in \ell^2 \,|\, a_{2014} \geq 0\}$ n'est pas un sous-espaces vectoriel.
   (b) $V_2 = \{(a_n) \in \ell^2 \,|\, a_{2014} = 0\}$ est un sous-espace vectoriel fermé, distinct de ℓ^2, il n'est donc pas dense ; par exemple $a = (a_n)$ telle que $a_n = 0$ pour tout $n \neq 2014$ et $a_{2014} = 1$ est dans $\ell^2 \setminus V_2$.
   (c) $V_3 = \{(a_n) \in \ell^2 \,|\, |a_n| \leq \frac{1}{n+1}\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel, puisqu'il est borné (et $\neq \{0\}$), en effet pour tout $(a_n) \in V_3$ on a $\|(a_n)\|_2 \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$.
   (d) $V_4 = \{(a_n) \in \ell^2 \,|\, \sum_{n \in \mathbb{N}} |\sin(a_n)| < +\infty\}$ est un sous-espace vectoriel. Soit $(a_n) \in V_4$, pour n assez grand on a, $|\sin(a_n)| \sim |a_n|$ d'où $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\sin(a_n)| < +\infty$ est équivalent à $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < +\infty$. Donc $V_4 = \ell^1$, c'est donc un sous-espace dense dans ℓ^2 (puisque $C_{00} \subset \ell^1$ et est dense dans ℓ^2).
2. $V_3 = \displaystyle\prod_{n \in \mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]$ est un produit de compact et la topologie induite par $\|.\|_2$ sur V_3 est la topologie produit, d'après le théorème de Tychonoff, V_3 est un compact. Comme $\dim \ell^2 = +\infty$, tout compact de ℓ^2 est d'intérieur vide ; en particulier l'intérieur de V_3 est vide.

Exercice 3. Réponses :

1) (a) $F = \ker \phi$ où $\phi : E \to \mathbb{R}$ est l'application linéaire continue telle que $\phi(f) = f(0)$ ($\|\phi\| = 1$), c'est donc un sous-espace vectoriel fermé de E.

(b) On note par N_∞ la norme induite par $\|.\|_\infty$ sur le quotient E/F et $\pi : E \to E/F$ la projection canonique.
Tout $f \in E$, s'écrit $f = f(0) + g$ où $g(x) = f(x) - f(0)$ pour tout $x \in [0{,}1]$, comme $g \in F$, alors $\pi(f) = \pi(f(0))$ où $f(0)$ est la fonction constante ; d'où $N_\infty(\pi(f)) = N_\infty(\pi(f(0))) \leq |f(0)|$. D'autre part, comme, pour tout $g \in F, g(0) = 0$,
$\sup_{x\in[0,1]} |f(0) - g(x)| \geq |f(0)|$, d'où $N_\infty(\pi(f(0))) \geq |f(0)|$.
Ainsi $N_\infty(\pi(f)) = N_\infty(\pi(f(0))) = |f(0)|$.

(c) Comme ϕ est une forme linéaire non nulle, elle est surjective, elle induit un isomorphisme linéaire de $E/\ker\phi = E/F$ sur $Im\phi = \mathbb{R}$, de plus c'est une isométrie, puisque, d'après (b) $|\phi(f)| = |f(0)| = N_\infty(\pi(f))$.

2) (a) $F = \ker\phi$ n'est pas fermé dans E (voir le cours) ; par exemple, la suite de fonctions de F, $f_n = \begin{cases} (n+1)x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n+1} < x \leq 1 \end{cases}$ converge pour la norme $\|.\|_1$ vers la fonction 1 qui n'est pas dans F.

(b) Comme $F = \ker\phi$ est un hyperplan non fermé, il est dense dans E ; de $N_1(\pi(f)) = 0$ pour tout $f \in F$, par densité de F et la continuité de la norme, on aura $N_1(\pi(f)) = 0$ pour $f \in E$.