Université de Rennes 1 Master 1
Année 2013-2014 ANAH Analyse hilbertiennes et applications

Contrôle continu n^o1
Lundi 14 octobre 2013
Durée 1h

Documents et calculatrices interdits

Exercice 1. (10 pts)

Justifier vos réponses.

1. Définir la compacité pour un espace topologique.
2. Soit $(E,\|.\|)$ un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non continue. $Ker(f) := f^{-1}(\{0\})$ est-il complet pour la norme $\|.\|$? qu'en est-il d'un supplémentaire F (i.e. $E = Ker(f) \oplus F$) ?
3. Dire lesquels des sous-ensembles de $(\mathbb{C},|.|)$, sont des espaces de Baire
   (a) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) = 0\}$
   (b) $\mathbb{Q}[i] := \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$
   (c) $D(0,1) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$.
   (d) $\mathbb{S}^1 - \{e^{ik\sqrt{2}} \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ où $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.
4. Soient X un ensemble (non vide) et $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur X tel que $\bigcap\limits_{A \in \mathscr{U}} A \neq \emptyset$.

   Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in X$ tel que $\mathscr{U} = \{A \subset X \,|\, x_0 \in A\}$.

Exercice 2. (4 pts) Soit A une partie dense de $(\mathbb{R},|.|)$. On définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ par $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in A$. L'espace quotient $\mathbb{R}/A$ est muni de la topologie quotient $\tau := \{U \subset (\mathbb{R}/A) \,|\, \pi^{-1}(U) \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}\}$, où π est la projection canonique.

Montrer que τ est la topologie grossière.

(Indication : on pourra utiliser, après l'avoir justifié, que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a + A$ est dense dans $\mathbb{R}$.)

Exercice 3. (6 pts) Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs complexes. On munit E de la distance définie par la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

i) Soit α un point de $[0,1]$. Montrer que l'application $f \mapsto f(\alpha)$ est continue sur E.

ii) Soit A l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $f(0) = f(1)$. Montrer que A est une partie fermée de E.

iii) Montrer que A n'est pas compacte. Est-elle une partie ouverte de E ?

iv) Soit $C > 0$ et B_C la partie de E formée des fonctions C-lipschitziennes telles que $f(0) = 0$.

Montrer que B_C est relativement compacte dans E.