Université de Rennes 1 | Master 1
Année 2013-2014 | ANAH Analyse hilbertiennes et applications

Contrôle continu $n^o 1$
Corrigé

Exercice 1.

1. Définir la compacité pour un espace topologique (voir le cours)
2. Non : la forme linéaire f n'étant pas continue son noyau n'est pas fermé et donc n'est pas complet. Comme le supplémentaire de $Ker(f)$ est de dimension 1, il est alors complet comme tout espace vectoriel normé de dimension finie.
3. Dire lesquels des sous-ensembles de $(\mathbb{C}, |.|)$, sont des espaces de Baire
   (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$ etant fermé dans $\mathbb{C}$, il est complet et donc de Baire.
   (b) $\mathbb{Q}[i] := \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, n'est pas un espace de Baire puisqu'il est réunion dénombrable de singleton qui sont des fermés d'intérieur vide.
   (c) $D(0,1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ c'est donc un espace de Baire.
   (d) On pose $A = \mathbb{S}^1 - \{e^{ik\sqrt{2}} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ où $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. $\mathbb{S}^1$ est un espace de Baire : puiqu'il est fermé dans $\mathbb{C}$, et donc A est le complémentaire d'un sous-ensemble dénombrable d'un espace de Baire est donc un espace de Baire. En effet, $A = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} (\mathbb{S}^1 \setminus \{e^{ik\sqrt{2}}\})$ est donc une intersection d'ouverts denses de $\mathbb{S}^1$.
   Si $\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts denses de A. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ouvert dense, U_n de $\mathbb{S}^1$ tel que $O_n = A \cap U_n$. D'où $\bigcap_n O_n = A \cap (\bigcap_n U_n) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} (\mathbb{S}^1 \setminus \{e^{ik\sqrt{2}}\}) \cap (\bigcap_n U_n)$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\mathbb{S}^1$ est dense dans $\mathbb{S}^1$ et donc dense dans A.
4. Soit $x_0 \in \bigcap_{A \in \mathscr{U}} A$. On pose $\mathscr{U}_0 = \{A \subset X \mid x_0 \in A\}$. Comme pour tout $B \subset X$ on a $x_0 \in B$ ou $x_0 \in X \setminus B$, $\mathscr{U}_0$ est un ultrafiltre et contient tous les éléments de $\mathscr{U}$, donc contient l'ultrafiltre $\mathscr{U}$. Ainsi $\mathscr{U} = \mathscr{U}_0$. L'unicité, est conséquence du fait que $\{x_0\} \in \mathscr{U}_0 = \mathscr{U}$, en effet, $\bigcap_{A \in \mathscr{U}_0} A = \{x_0\}$.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, comme A est dense tout voisinage de $x - a$ rencontre A, comme les translations sont des homéomorphismes, tout voisinage de x rencontre $a + A$, d'où la densité de $a + A$ dans $\mathbb{R}$.

Soit F un fermé non vide. Par surjectivité et continuité de π, $\pi^{-1}(F)$ est un fermé non vide de $\mathbb{R}$, donc contient un sous-ensemble $a + A$, parsuite contient son adhérence qui est par densite, $\mathbb{R}$. D'où $\pi^{-1}(F) = \mathbb{R}$ i.e. $F = \mathbb{R}/A$. Ainsi $\tau = \{\mathbb{R}/A, \emptyset\}$, c'est donc la topologie grossière.

Remarque 0.1 *On peut aussi raisonner sur les ouverts. Soit $U \in \tau$, $U \neq \emptyset$. Alors $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$, comme $a + A$ est dense, $\pi^{-1}(U) \cap (a + A) \neq \emptyset$. Donc $a = x - r$ avec $x \in \pi^{-1}(U)$ et $r \in A$, d'ou $\pi(a) = \pi(x) \in U$, comme $a \in \mathbb{R}$ est arbitraire on aura que $\pi(\mathbb{R}) \subset U$, d'où $U = \mathbb{R}/A$.*

Exercice 3.

i) Soit α un point de [0,1].
Notons ϕ_α cette application. Alors ϕ_α est clairement linéaire et comme $|f(\alpha)| \leq \|f\|_\infty$ elle est aussi continue

ii) $A = (\phi_0 - \phi_1)^{-1}(0)$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue, il est donc fermé.

iii) Les fonctions constantes sont dans A, il n'est donc pas borné, par conséquence il n'est pas compact.

La fonction nulle est dans A, et toute boule centrée en 0, contient des fonctions telles que $f(0) \neq f(1)$.
Par exemple : pour tout $\epsilon > 0$, $f_\epsilon(x) = \epsilon x$, vérifie, $f_\epsilon(0) = 0 \neq \epsilon = f(1)$ et, étant donnée une boule $B(0,r)$, f_ϵ est dans cette boule pour tout $\epsilon < r$. D'où A n'est pas ouvert.

iv) Soit $C > 0$ et B_C la partie de E formée des fonctions C-lipschitziennes telles que $f(0) = 0$.
La famille B_C est équicontinue car Lipschitzienne, d'autre part pour tout $x \in [0,1]$ et tout $f \in B_C$, on a $|f(x) - f(0)| \leq C|x| \leq C$. Ainsi $|f(x)| \leq C + |f(0)| = C$ donc $B_C(x) = \{f(x) \,|\, f \in B_C\}$ est contenu dans $[-C,C]$, est donc relativement compact dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in [0,1]$. Par le théorème de Arzela-Ascoli, B_C est relativement compacte dans E.