Université de Rennes 1 | Master 1
Année 2012-2013 | ANAH Analyse hilbertiennes et applications

Contrôle continu $n^o 1$
mercredi 17 octobre 2012
Durée 1h
Documents et calculatrices interdits

Exercice 1. (7 pts)
Justifier (succintement) vos réponses.

1. Soit (E,d) un espace métrique complet et A une partie dense de E, $A \neq E$.
   A est-il complet pour la métrique d ?
2. Enoncer le théorème Baire.
3. Dire lesquels des sous-espaces de $(\mathbb{R},|.|)$, sont des espaces de Baires
   (a) $\mathbb{Q}$
   (b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   (c) $\left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} \bigcup \{0\}$
   (d) $[0,3[$
4. Que peut-on dire d'un espace de Banach $(E,\|.\|)$ qui a une famille génératrice dénombrable i.e. $E = Vect\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$?

Exercice 2. (5 pts)
Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Soit $a \in E$ et $r > 0$. Montrer que $B(a,r) = a + rB(0,1)$.
2. Montrer que pour $a,b \in E$, $r_1,r_2 \in]0,+\infty[$, on a
   $B(a+b,r_1+r_2) = B(a,r_1) + B(b,r_2)$.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E, $F \neq E$. Montrer que F est d'intérieur vide dans E.
4. Montrer que l'intérieur d'un convexe de E est convexe.

Exercice 3. (8 pts)
Soit $E = C([0;1];\mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

Soit $F = \left\{ f \in E : f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(x)\, dx \geq 1 \right\}$.

1. Montrer que $(E,\|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

2. Montrer que les applications
   $\phi : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \phi(f) = f(0)$ et
   $\psi : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \psi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$
   sont des formes linéaires continues.
   Calculer $\|\phi\|$ et $\|\psi\|$
3. En déduire que F muni de la distance induite est complet.
4. Montrer que pour tout $f \in F$, on a $\|f\|_\infty > 1$.
   F est-il compact ?