Contrôle continu n^o1
Corrigé

Exercice 1.

1. Comme $A \neq E = \overline{A}$, A n'est pas fermée et donc n'est pas complet.
2. Tout espace métrique complet est un espace de Baire
   Tout espace métrique localement compact est un espace de Baire
3. (a) $\mathbb{Q} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{r\}$ est réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide, n'est donc pas un espace de Baire.

   (b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{r\} = \bigcap_{r\in\mathbb{Q}} (\mathbb{R} \setminus \{r\})$ est un espace de Baire.
   (En effet, si $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts denses de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ouvert dense, U_n de $\mathbb{R}$ tel que $O_n = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap U_n$.
   D'où $\bigcap_n O_n = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (\bigcap_n U_n) = \bigcap_{r\in\mathbb{Q}} (\mathbb{R} \setminus \{r\}) \cap (\bigcap_n U_n)$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\mathbb{R}$, est dense dans $\mathbb{R}$ et contenue dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ donc dense dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

   (c) $\left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} \bigcup \{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, par conséquent complet et donc un espace de Baire.

   (d) $[0,3[$ est localement compact, donc un espace de Baire.
4. Si E a une famille génératrice dénombrable, sa base de Hamel est au plus dénombrable, comme $(E,\|.\|)$ est un espace de Banach, elle est nécessairement finie, donc E est de dimension finie.

Exercice 2.

1. Soit $x \in B(a,r)$, alors$\|x - a\| < r$. En écrivant $x = a + r\dfrac{x-a}{r}$, en posant $y = \dfrac{x-a}{r}$, on a $\|y\| = \frac{\|x-a\|}{r} < 1$, d'ou $x \in a + rB(0,1)$. Réciproquement, si $x \in a + rB(0,1)$, x s'écrit $x = a + ry$ avec $\|y\| < 1$, d'où $\|x - a\| < r$ donc $x \in B(a,r)$.
2. D'aprè 1.) $B(a+b,r_1+r_2) = (a+b)+(r_1+r_2)B(0,1)$. D'autre part $(r_1+r_2)B(0,1) = r_1B(0,1) + r_2B(0,1)$. D'où $B(a + b,r_1 + r_2) = (a + b) + r_1B(0,1) + r_2B(0,1) = (a + r_1B(0,1)) + (b + r_2B(0,1)) = B(a,r_1) + B(b,r_2)$.
   Remarque : On obtient de la même manière $B(a + b,r_1 + r_2) = B(b,r_1) + B(a,r_2)$.

3. On raisonne par l'absurde ; supposons que F soit d'intérieur non vide, alors il existe $a \in F$, $r > 0$ tels que $B(a,r) \subset F$, par symétrie $B(-a,r) \subset F$ et d'après 2.) $B(0,2r) = B(a,r) + B(-a,r) \subset F$.
   Soit $x \in E - \{0\}$ alors $r\dfrac{x}{\|x\|} \in B(0,2r) \subset F$, donc $x \in F$. D'où $F = E$, contredit l'hypothèse $F \neq E$.
4. Soit A un convexe de E, on suppose que $\mathring{A} \neq \emptyset$ (sinon il n'y a rien à montrer).
   Soient $a,b \in \mathring{A}$ alors il existe r_1 et $r_2 > 0$ tels que $B(a,r_1) \subset A$ et $B(b,r_2) \subset A$. Par convexité de A, on a pour tout $t \in [0,1]$, $tB(a,r_1) + (1-t)B(b,r_2) \subset A$, d'après 2.) $B(ta+(1-t)b,tr_1+(1-t)r_2) = tB(a,r_1)+(1-t)B(b,r_2) \subset A$, d'où $ta+(1-t)b \in \mathring{A}$. Ainsi $\mathring{A}$ est convexe.

Exercice 3.

1. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(E,\|.\|_\infty)$, par définition pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que : $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| = \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$, dès que $n,m \geq N(\epsilon)$. Alors, pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(f_n(x))$ est de cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet, donc converge, on note par $f(x)$ sa limite ; et en faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient $\lim_{m\to+\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, pout tout $n \geq N(\epsilon)$. On a donc $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$, dès que $n \geq N(\epsilon)$, par suite la suite de fonctions continues (f_n) converge uniformément vers f, on en déduit que f est continue. Ainsi toute suite de Cauchy de E converge dans E, donc E est un espace de Banach.
2. On vérifie facilement que ϕ et ψ sont des formes linéaires. D'autre part
   $\|\phi(f)\| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty$ et pour $f = 1$ on a $\|\phi(f)\| = 1 = \|f\|_\infty$ d'où ϕ est continue et $\|\phi\| = 1$.

   $\psi(f) = \left|\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx \leq \|f\|_\infty$ et pour $f = 1$ on a $\|\psi(f)\| = 1 = \|f\|_\infty$ d'où ψ est continue et $\|\psi\| = 1$.
3. On a $F = \phi^{-1}(\{0\}) \bigcap \psi^{-1}([1,+\infty[)$. Comme $\phi^{-1}(\{0\})$ et $\psi^{-1}([1,+\infty[)$, sont des images réciproquees par des applications continues de fermés, ils sont fermés, donc F qui est une intersection de deux fermés, est fermé.
4. Supposons le contraire i.e. il existe $f \in F$ telle que $\|f\|_\infty \leq 1$. Alors $1 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \|f\|_\infty \leq 1$ donc $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$, par suite $\int_0^1 (1 - f(x))\,dx = 0$. Alors, $1 - f$ est une fonction positive et $\int_0^1 (1 - f(x))\,dx = 0$, Ainsi $f = 1$, mais ceci contredit $f(0) = 0$. Donc il n'exise pas de $f \in F$ telle que $\|f\|_\infty \leq 1$.
   L'ensemble Fn'est pas compact, car il n'est pas borné. En effet, la suite $f_n(x) = nx$ pour tout $x \in [0,1]$ est dans F et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty = n$, elle n'est pas bornée.