Mathématiques Générales

UFR de Mathématiques
Université de Rennes 1

7 septembre 2017

Adresse de la page du cours

http://perso.univ-rennes1.fr/karim.bekka/AN1.html

Mes coordonnées : Karim BEKKA

Bureau : n°613 (6eme étage du Bâtiment 22)

email : karim.bekka@ univ-rennes1.fr

1 INTRODUCTION

Introduction

- Lorsqu'on est confronté à une séquence d'évènements, il est naturel de se poser la question de son évolution. Le phénomène va-t-il se "stabiliser " dans un certain état, va-t-il se répéter encore et encore, va-t-il avoir un comportement qui paraît aléatoire ?

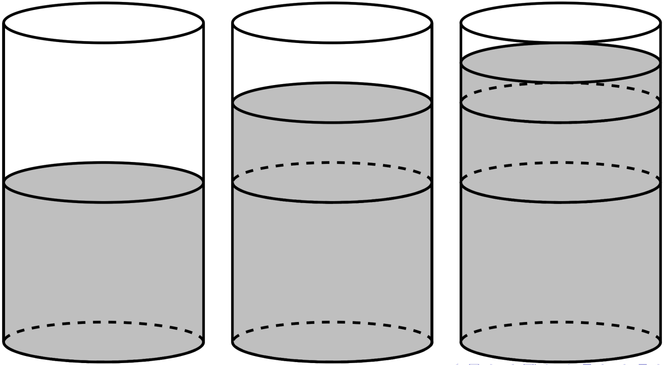
Introduction

- Lorsqu'on est confronté à une séquence d'évènements, il est naturel de se poser la question de son évolution. Le phénomène va-t-il se "stabiliser " dans un certain état, va-t-il se répéter encore et encore, va-t-il avoir un comportement qui paraît aléatoire ?
- Par exemple, si on considère le mouvement de la terre autour du soleil, on voit que les positions de celle-ci se répètent après une année, on dit que le mouvement est *périodique*. Si on regarde un pendule avec frottement, il finira toujours par se rapprocher de plus en plus de la position d'équilibre " tête en bas" on dit que le mouvement *converge* vers cette position d'équilibre.

- Ce type de questions ne se pose pas uniquement à propos de phénomènes physiques mais s'applique aussi à des "constructions mentales"
  Commençons par une illustration simple.

INTRODUCTION

- Ce type de questions ne se pose pas uniquement à propos de phénomènes physiques mais s'applique aussi à des "constructions mentales" Commençons par une illustration simple.
- Supposons que je remplisse un verre à moitié, puis que je rajoute la quantité de liquide nécessaire pour remplir la moitié restée vide, et que je répète cette opération encore et encore (voir figure) vais-je finir par remplir tout le verre ?



- Graphiquement, on se doute bien que ce sera le cas : l'espace resté vide dans le verre est de plus en plus petit et on le comble chaque fois de moitié ;

- Graphiquement, on se doute bien que ce sera le cas : l'espace resté vide dans le verre est de plus en plus petit et on le comble chaque fois de moitié ;
- donc, si je répète l'opération une *infinité de fois*, j'aurai rempli mon verre.

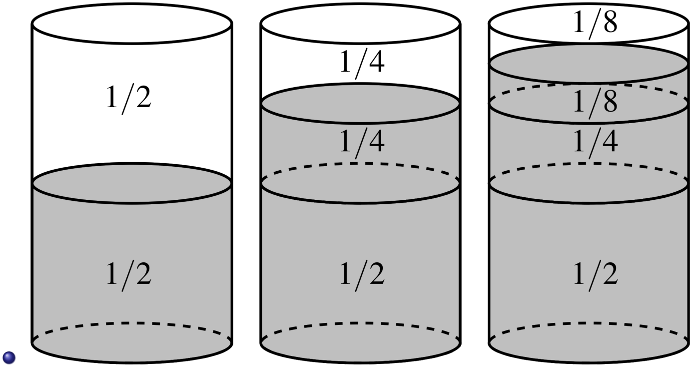
- Graphiquement, on se doute bien que ce sera le cas : l'espace resté vide dans le verre est de plus en plus petit et on le comble chaque fois de moitié ;
- donc, si je répète l'opération une *infinité de fois*, j'aurai rempli mon verre.
- Traduisons cela mathématiquement. Je commence par remplir le verre à moitié, donc $1/2$ est plein et $1/2$ est vide.

- Graphiquement, on se doute bien que ce sera le cas : l'espace resté vide dans le verre est de plus en plus petit et on le comble chaque fois de moitié ;
- donc, si je répète l'opération une *infinité de fois*, j'aurai rempli mon verre.
- Traduisons cela mathématiquement. Je commence par remplir le verre à moitié, donc $1/2$ est plein et $1/2$ est vide.
- À la seconde étape, je remplis la moitié du volume vide, c'est-à-dire la moitié de la moitié du verre.

INTRODUCTION

- Graphiquement, on se doute bien que ce sera le cas : l'espace resté vide dans le verre est de plus en plus petit et on le comble chaque fois de moitié ;
- donc, si je répète l'opération une *infinité de fois*, j'aurai rempli mon verre.
- Traduisons cela mathématiquement. Je commence par remplir le verre à moitié, donc $1/2$ est plein et $1/2$ est vide.
- À la seconde étape, je remplis la moitié du volume vide, c'est-à-dire la moitié de la moitié du verre.
- Donc, maintenant, $1/2 + 1/4$ du verre est plein et 1/4 est vide. Ensuite, àla troisième étape, je remplis 1/2 de ce qui est vide,

- Graphiquement, on se doute bien que ce sera le cas : l'espace resté vide dans le verre est de plus en plus petit et on le comble chaque fois de moitié ;
- donc, si je répète l'opération une *infinité de fois*, j'aurai rempli mon verre.
- Traduisons cela mathématiquement. Je commence par remplir le verre à moitié, donc $1/2$ est plein et $1/2$ est vide.
- À la seconde étape, je remplis la moitié du volume vide, c'est-à-dire la moitié de la moitié du verre.
- Donc, maintenant, $1/2+1/4$ du verre est plein et 1/4 est vide. Ensuite, àla troisième étape, je remplis 1/2 de ce qui est vide,
- c'est-à-dire que j'ajoute $1/8$ de liquide, ce qui me donne que $1/2+1/4+1/8$ du verre est plein tandis que $1/8 = 1/2^3$ est vide (voir figure).


1/2
1/2
1/4
1/4
1/2
1/8
1/8
1/4
1/2

- En continuant de la sorte, on se rend compte qu'à la n^{e} étape, $1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n$ du verre sera plein et que $1/2^n$ restera vide.

- En continuant de la sorte, on se rend compte qu'à la n^{e} étape, $1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n$ du verre sera plein et que $1/2^n$ restera vide.
- Que veut dire, dans ce formalisme, l'affirmation faite plus haut qu'on finira par remplir le verre ?

- En continuant de la sorte, on se rend compte qu'à la n^{e} étape, $1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n$ du verre sera plein et que $1/2^n$ restera vide.
- Que veut dire, dans ce formalisme, l'affirmation faite plus haut qu'on finira par remplir le verre ?
- Simplement que la partie pleine se rapproche de la totalité du verre, c'est-à-dire que

- En continuant de la sorte, on se rend compte qu'à la n^{e} étape, $1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n$ du verre sera plein et que $1/2^n$ restera vide.
- Que veut dire, dans ce formalisme, l'affirmation faite plus haut qu'on finira par remplir le verre ?
- Simplement que la partie pleine se rapproche de la totalité du verre, c'est-à-dire que
- $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ se rapproche de 1 lorsque n devient grand.

- En continuant de la sorte, on se rend compte qu'à la n^{e} étape, $1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n$ du verre sera plein et que $1/2^n$ restera vide.
- Que veut dire, dans ce formalisme, l'affirmation faite plus haut qu'on finira par remplir le verre ?
- Simplement que la partie pleine se rapproche de la totalité du verre, c'est-à-dire que
- $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ se rapproche de 1 lorsque n devient grand.
- De manière plus succincte, on écrit que la "somme infinie" de tous les $1/2^n, n=1,2,\ldots,$ vaut 1 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$$

- Ici, la comparaison avec le remplissage du verre nous a amené à trouver le comportement de la suite de nombres

- Ici, la comparaison avec le remplissage du verre nous a amené à trouver le comportement de la suite de nombres
- $u_1 = 1/2, u_2 = 1/2 + 1/4, \dots,$
  $u_n = 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n$, $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.

- Ici, la comparaison avec le remplissage du verre nous a amené à trouver le comportement de la suite de nombres
- $u_1 = 1/2, u_2 = 1/2 + 1/4, \dots,$
  $u_n = 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n$, $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.
- Mais quel est celui de $1/3 + 1/9 + \cdots + 1/3^n$,

- Ici, la comparaison avec le remplissage du verre nous a amené à trouver le comportement de la suite de nombres
- $u_1 = 1/2, u_2 = 1/2 + 1/4, \dots,$
  $u_n = 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n$, $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.
- Mais quel est celui de $1/3 + 1/9 + \cdots + 1/3^n$,
- de 1/2- $1/4 + 1/8 - 1/16 + \cdots + (-1/2)^n$

Introduction

- Ici, la comparaison avec le remplissage du verre nous a amené à trouver le comportement de la suite de nombres
- $u_1 = 1/2, u_2 = 1/2 + 1/4, \ldots,$
  $u_n = 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n$, $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.
- Mais quel est celui de $1/3 + 1/9 + \cdots + 1/3^n$,
- de 1/2- $1/4 + 1/8 - 1/16 + \cdots + (-1/2)^n$
- ou de $1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots + 1/n$?

- Ici, la comparaison avec le remplissage du verre nous a amené à trouver le comportement de la suite de nombres
- $u_1 = 1/2, u_2 = 1/2 + 1/4, \ldots,$
  $u_n = 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n$, $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.
- Mais quel est celui de $1/3 + 1/9 + \cdots + 1/3^n$,
- de 1/2- $1/4 + 1/8 - 1/16 + \cdots + (-1/2)^n$
- ou de $1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots + 1/n$?
- Nous reviendrons succinctement sur ces questions une fois la notion de convergence correctement définie.

- Lorsqu’on ne dispose pas d’une image simple pour guider notre intuition, on peut recourir au calcul numérique pour avoir une idée de la situation.

- Lorsqu'on ne dispose pas d'une image simple pour guider notre intuition, on peut recourir au calcul numérique pour avoir une idée de la situation.
- Considérons par exemple la fonction $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

- Lorsqu'on ne dispose pas d'une image simple pour guider notre intuition, on peut recourir au calcul numérique pour avoir une idée de la situation.
- Considérons par exemple la fonction $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

- Celle-ci n'est pas définie en $x = 0$. Mais quel est son comportement pour x proche de 0 ?

- Lorsqu'on ne dispose pas d'une image simple pour guider notre intuition, on peut recourir au calcul numérique pour avoir une idée de la situation.
- Considérons par exemple la fonction $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

- Celle-ci n'est pas définie en $x = 0$. Mais quel est son comportement pour x proche de 0 ?
- Le fait qu'on divise par x qui va devenir de plus en plus petit rend-il $f(x)$ de plus en plus grand à la manière de $1/x$?

- Lorsqu'on ne dispose pas d'une image simple pour guider notre intuition, on peut recourir au calcul numérique pour avoir une idée de la situation.
- Considérons par exemple la fonction $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

- Celle-ci n'est pas définie en $x = 0$. Mais quel est son comportement pour x proche de 0 ?
- Le fait qu'on divise par x qui va devenir de plus en plus petit rend-il $f(x)$ de plus en plus grand à la manière de $1/x$?
- Ce n'est pas clair car, à la différence de $1/x$, le numérateur de $\frac{\sin x}{x}$ s'annule aussi en $x = 0$!

- Le tout est donc de savoir qui du numérateur ou du dénominateur s'annule le plus vite.

- Le tout est donc de savoir qui du numérateur ou du dénominateur s'annule le plus vite.
- Si le dénominateur est beaucoup plus petit que le numérateur, le quotient sera très grand ;

- Le tout est donc de savoir qui du numérateur ou du dénominateur s'annule le plus vite.
- Si le dénominateur est beaucoup plus petit que le numérateur, le quotient sera très grand ;
- si c'est le numérateur qui se rapproche de zéro plus vite que le dénominateur, le quotient se rapprochera lui aussi de zéro ;

INTRODUCTION

- Le tout est donc de savoir qui du numérateur ou du dénominateur s'annule le plus vite.
- Si le dénominateur est beaucoup plus petit que le numérateur, le quotient sera très grand ;
- si c'est le numérateur qui se rapproche de zéro plus vite que le dénominateur, le quotient se rapprochera lui aussi de zéro ;
- si le numérateur et le dénominateur tendent vers zéro à la même vitesse, alors le quotient peut se comporter de diverses manière : convergence, oscillations etc ....

- Le tout est donc de savoir qui du numérateur ou du dénominateur s'annule le plus vite.
- Si le dénominateur est beaucoup plus petit que le numérateur, le quotient sera très grand ;
- si c'est le numérateur qui se rapproche de zéro plus vite que le dénominateur, le quotient se rapprochera lui aussi de zéro ;
- si le numérateur et le dénominateur tendent vers zéro à la même vitesse, alors le quotient peut se comporter de diverses manière : convergence, oscillations etc ....

- Le tout est donc de savoir qui du numérateur ou du dénominateur s'annule le plus vite.
- Si le dénominateur est beaucoup plus petit que le numérateur, le quotient sera très grand ;
- si c'est le numérateur qui se rapproche de zéro plus vite que le dénominateur, le quotient se rapprochera lui aussi de zéro ;
- si le numérateur et le dénominateur tendent vers zéro à la même vitesse, alors le quotient peut se comporter de diverses manière : convergence, oscillations etc ....

Exemples

Imaginez des exemples pour chacun des cas ! Suggestion : examinez les fonctions $x \mapsto ax^{\alpha}/x^{\beta}$ et $x \mapsto x^{\alpha}\cos(1/x)/x^{\beta}$ pour différentes valeurs de a, α et β.

- Afin d'essayer de déterminer dans quel cas nous sommes, nous avons au tableau ci-dessus, calculé les valeurs de $f(x)$ pour $x = 1, x = 1/10, x = 1/100, \dots, x = 10^{-5}$. La conclusion que l'on tire est que lorsque x se rapproche de 0, $\dfrac{\sin x}{x}$ se rapproche de 1.

x	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
$\frac{\sin x}{x}$	0.841470984808...	0.998334166468...	0.999983333417...

x	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
$\frac{\sin x}{x}$	0.841470984808...	0.998334166468...	0.999983333417...

INTRODUCTION

x	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
$\frac{\sin x}{x}$	0.841470984808...	0.998334166468...	0.999983333417...

x	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{100000}$
$\frac{\sin x}{x}$	0.999999833333...	0.999999998333...	0.999999999983...

Nous pouvons reformuler ceci comme suit : la limite des valeurs de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0 vaut 1.

Nous pouvons reformuler ceci comme suit : la limite des valeurs de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0 vaut 1.

- Nous voudrions insister cependant sur le fait que nous n'avons *rien démontré*. Nous avons seulement *observé* des résultats numériques et extrapolé.

Nous pouvons reformuler ceci comme suit : la limite des valeurs de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0 vaut 1.

- Nous voudrions insister cependant sur le fait que nous n'avons *rien démontré*. Nous avons seulement *observé* des résultats numériques et extrapolé.
- Car en effet rien ne nous assure que, pour $x = 10^{-1000}$, $f(x)$ est encore proche de 1 !

Nous pouvons reformuler ceci comme suit : la limite des valeurs de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0 vaut 1.

- Nous voudrions insister cependant sur le fait que nous n'avons *rien démontré*. Nous avons seulement *observé* des résultats numériques et extrapolé.
- Car en effet rien ne nous assure que, pour $x = 10^{-1000}$, $f(x)$ est encore proche de 1 !
- De plus les calculs sur ordinateur sont forcément entachés d'erreurs. En effet, un ordinateur ne peut stocker qu'un nombre limité de chiffres et doit donc doit tronquer les nombres. Cela peut avoir des conséquences néfastes si on n'y prend pas garde.

Nous pouvons reformuler ceci comme suit : la limite des valeurs de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0 vaut 1.

- Nous voudrions insister cependant sur le fait que nous n'avons *rien démontré*. Nous avons seulement *observé* des résultats numériques et extrapolé.
- Car en effet rien ne nous assure que, pour $x = 10^{-1000}$, $f(x)$ est encore proche de 1 !
- De plus les calculs sur ordinateur sont forcément entachés d'erreurs. En effet, un ordinateur ne peut stocker qu'un nombre limité de chiffres et doit donc doit tronquer les nombres. Cela peut avoir des conséquences néfastes si on n'y prend pas garde.
- Nous devons donc nous garder de conclusions hâtives. Nous avons seulement une *bonne indication* que, lorsque x est petit, $\dfrac{\sin x}{x} \approx 1$.

Nous pouvons reformuler ceci comme suit : la limite des valeurs de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0 vaut 1.

- Nous voudrions insister cependant sur le fait que nous n'avons *rien démontré*. Nous avons seulement *observé* des résultats numériques et extrapolé.
- Car en effet rien ne nous assure que, pour $x = 10^{-1000}$, $f(x)$ est encore proche de 1 !
- De plus les calculs sur ordinateur sont forcément entachés d'erreurs. En effet, un ordinateur ne peut stocker qu'un nombre limité de chiffres et doit donc doit tronquer les nombres. Cela peut avoir des conséquences néfastes si on n'y prend pas garde.
- Nous devons donc nous garder de conclusions hâtives. Nous avons seulement une *bonne indication* que, lorsque x est petit, $\dfrac{\sin x}{x} \approx 1$.
- Ce cours vous offre les concepts et les outils qui vous permettront de le *démontrer* – et donc d'en être sûr.

Ce genre de méthode, où on définit approximativement une quantité pour ensuite la "raffiner" est au coeur même de l'analyse.

Ce genre de méthode, où on définit approximativement une quantité pour ensuite la "raffiner" est au coeur même de l'analyse.

Une utilisation très ancienne de ce type de méthode est due à Archimède.

Ce genre de méthode, où on définit approximativement une quantité pour ensuite la "raffiner" est au coeur même de l'analyse.

Une utilisation très ancienne de ce type de méthode est due à Archimède.

Les grecs savaient que l'aire d'un disque de rayon r est αr^2 et que sa circonférence est $2\alpha r$ où α est un nombre qui ne dépend pas du rayon du cercle.

Ce genre de méthode, où on définit approximativement une quantité pour ensuite la "raffiner" est au coeur même de l'analyse.

Une utilisation très ancienne de ce type de méthode est due à Archimède.

Les grecs savaient que l'aire d'un disque de rayon r est αr^2 et que sa circonférence est $2\alpha r$ où α est un nombre qui ne dépend pas du rayon du cercle.

Mais toute la question était : quelle est la valeur de α ?

Ce genre de méthode, où on définit approximativement une quantité pour ensuite la "raffiner" est au coeur même de l'analyse.

Une utilisation très ancienne de ce type de méthode est due à Archimède.

Les grecs savaient que l'aire d'un disque de rayon r est αr^2 et que sa circonférence est $2\alpha r$ où α est un nombre qui ne dépend pas du rayon du cercle.

Mais toute la question était : quelle est la valeur de α ?

- L'idée géniale d'Archimède fut la suivante : s'il est difficile de calculer α exactement, au moins peut-on l'approcher !

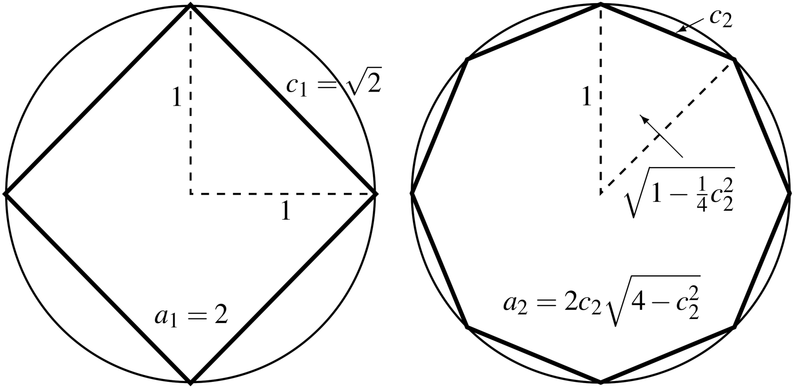
- En effet, considérons le disque de rayon unité. On peut lui inscrire un polygone avec un grand nombre de côtés. L'aire du polygone sera une bonne approximation de l'aire du disque, c'est-à-dire de α !

- En effet, considérons le disque de rayon unité. On peut lui inscrire un polygone avec un grand nombre de côtés. L'aire du polygone sera une bonne approximation de l'aire du disque, c'est-à-dire de α !

  Oui mais comment calculer facilement l'aire de tels polygones ?

- En effet, considérons le disque de rayon unité. On peut lui inscrire un polygone avec un grand nombre de côtés. L'aire du polygone sera une bonne approximation de l'aire du disque, c'est-à-dire de α !

  Oui mais comment calculer facilement l'aire de tels polygones ?



Commençons par un polygone simple : un carré. Le côté du carré vaut $\sqrt{2}$

Commençons par un polygone simple : un carré. Le côté du carré vaut $\sqrt{2}$ et donc son aire a_1 vaut 2.

Commençons par un polygone simple : un carré. Le côté du carré vaut $\sqrt{2}$ et donc son aire a_1 vaut 2.

Divisons chaque côté du carré en deux et poussons les milieux sur le cercle.

Commençons par un polygone simple : un carré. Le côté du carré vaut $\sqrt{2}$ et donc son aire a_1 vaut 2.

Divisons chaque côté du carré en deux et poussons les milieux sur le cercle.

Nous obtenons un octogone

Commençons par un polygone simple : un carré. Le côté du carré vaut $\sqrt{2}$ et donc son aire a_1 vaut 2.

Divisons chaque côté du carré en deux et poussons les milieux sur le cercle.

Nous obtenons un octogone

Pour calculer son aire a_2, il suffit de connaître la longueur c_2 du côté de l'octogone car on en déduit que l'aire du triangle vaut $\frac{1}{2}c_2\sqrt{1-\frac{1}{4}c_2^2}$, d'où

$$a_2 = 8 \cdot \frac{1}{4}c_2\sqrt{4-c_2^2} = 2c_2\sqrt{4-c_2^2}$$

Commençons par un polygone simple : un carré. Le côté du carré vaut $\sqrt{2}$ et donc son aire a_1 vaut 2.

Divisons chaque côté du carré en deux et poussons les milieux sur le cercle.

Nous obtenons un octogone

Pour calculer son aire a_2, il suffit de connaître la longueur c_2 du côté de l'octogone car on en déduit que l'aire du triangle vaut $\frac{1}{2}c_2\sqrt{1-\frac{1}{4}c_2^2}$, d'où

$$a_2 = 8 \cdot \frac{1}{4}c_2\sqrt{4-c_2^2} = 2c_2\sqrt{4-c_2^2}$$

Reste à déterminer c_2. Cependant, comme nous allons ensuite répéter la procédure de division des côtés, mieux vaut chercher un argument général.

Supposons donc que nous ayons déjà effectué n étapes. Nous avons un polygone à 2^{n+1} côtés dont nous connaissons l'aire a_n et le côté c_n.

Supposons donc que nous ayons déjà effectué n étapes. Nous avons un polygone à 2^{n+1} côtés dont nous connaissons l'aire a_n et le côté c_n.

- Nous divisons chaque côté en deux selon la procédure ci-dessus, ce qui nous donne un polygone à 2^{n+2} côtés dont nous voudrions déterminer l'aire a_{n+1} et le côté c_{n+1}.

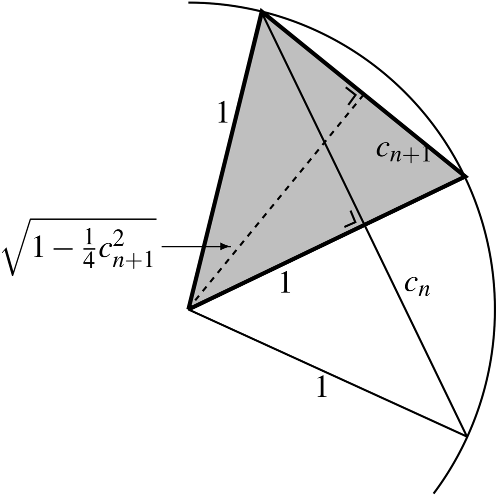
Supposons donc que nous ayons déjà effectué n étapes. Nous avons un polygone à 2^{n+1} côtés dont nous connaissons l'aire a_n et le côté c_n.

- Nous divisons chaque côté en deux selon la procédure ci-dessus, ce qui nous donne un polygone à 2^{n+2} côtés dont nous voudrions déterminer l'aire a_{n+1} et le côté c_{n+1}.
- Par un raisonnement analogue à celui fait pour l'octogone, nous savons que ces deux quantités sont liées et qu'en fait on a

$$a_{n+1} = 2^{n+2} \cdot \frac{1}{2} c_{n+1} \sqrt{1 - \frac{1}{4} c_{n+1}^2} = 2^n c_{n+1} \sqrt{4 - c_{n+1}^2}.$$

- Pour déterminer c_{n+1}, regardons la figure et évaluons de deux manières différentes l'aire du triangle grisé.

- Pour déterminer c_{n+1}, regardons la figure et évaluons de deux manières différentes l'aire du triangle grisé.



C'est le même triangle qui nous a servi à calculer l'aire totale du polygone, donc son aire vaut

$$\frac{1}{2}c_{n+1}\sqrt{1-\frac{1}{4}c_{n+1}^2}.$$

C'est le même triangle qui nous a servi à calculer l'aire totale du polygone, donc son aire vaut

$$\frac{1}{2}c_{n+1}\sqrt{1-\frac{1}{4}c_{n+1}^2}.$$

- Supposez que la hauteur vale $c_{n+1}/2$. Vous verrez que la moitié du côté vaut, par le théorème de Pythagore, $\sqrt{1-c_{n+1}^2/4}$.

D'autre part, on peut considérer qu'il a comme base un rayon du cercle et comme hauteur $c_n/2$.

D'autre part, on peut considérer qu'il a comme base un rayon du cercle et comme hauteur $c_n/2$.

Son aire vaut donc aussi $c_n/4$.

D'autre part, on peut considérer qu'il a comme base un rayon du cercle et comme hauteur $c_n/2$.

Son aire vaut donc aussi $c_n/4$.

En égalant ces deux valeurs, on trouve que

$$c_n = c_{n+1}\sqrt{4 - c_{n+1}^2}$$

ou encore, en élevant au carré,

$$(c_{n+1}^2)^2 - 4c_{n+1}^2 + c_n^2 = 0.$$

C'est une équation du second degré en c_{n+1}^2 dont les racines sont

$$r_- = 2 - \sqrt{4 - c_n^2} \quad \text{et} \quad r_+ = 2 + \sqrt{4 - c_n^2}.$$

Pourquoi deux racines et laquelle choisir ?

Comme ici c'est le côté qu'on a nommé c_{n+1}, on a géométriquement qu'il est plus petit que la hauteur.

Comme ici c'est le côté qu'on a nommé c_{n+1}, on a géométriquement qu'il est plus petit que la hauteur.

- Ainsi

$$c_{n+1}^2 = r_-$$

Comme ici c'est le côté qu'on a nommé c_{n+1}, on a géométriquement qu'il est plus petit que la hauteur.

- Ainsi

$$c_{n+1}^2 = r_-$$

- On conclut que

$$c_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}} \text{ et } a_{n+1} = 2^n c_{n+1} \sqrt{4 - c_{n+1}^2}.$$

Comme ici c'est le côté qu'on a nommé c_{n+1}, on a géométriquement qu'il est plus petit que la hauteur.

- Ainsi

$$c_{n+1}^2 = r_-$$

- On conclut que
$c_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}}$ et $a_{n+1} = 2^n c_{n+1}\sqrt{4 - c_{n+1}^2}$.
- On peut encore simplifier un rien la deuxième de ces expressions. En effet, $c_{n+1}^2(4 - c_{n+1}^2) = r_- \times r_+$ le produit des racines se lit directement sur l'équation : $r_- \times r_+ = c_n^2$.

Comme ici c'est le côté qu'on a nommé c_{n+1}, on a géométriquement qu'il est plus petit que la hauteur.

- Ainsi

$$c_{n+1}^2 = r_-$$

- On conclut que
$c_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}}$ et $a_{n+1} = 2^n c_{n+1}\sqrt{4 - c_{n+1}^2}$.
- On peut encore simplifier un rien la deuxième de ces expressions. En effet, $c_{n+1}^2(4 - c_{n+1}^2) = r_- \times r_+$ le produit des racines se lit directement sur l'équation : $r_- \times r_+ = c_n^2$.
- Finalement, on a :

$$c_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}} \text{ et } a_{n+1} = 2^n c_n.$$

Comme ici c'est le côté qu'on a nommé c_{n+1}, on a géométriquement qu'il est plus petit que la hauteur.

- Ainsi

$$c_{n+1}^2 = r_-$$

- On conclut que
$c_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}}$ et $a_{n+1} = 2^n c_{n+1} \sqrt{4 - c_{n+1}^2}$.
- On peut encore simplifier un rien la deuxième de ces expressions. En effet, $c_{n+1}^2 (4 - c_{n+1}^2) = r_- \times r_+$ le produit des racines se lit directement sur l'équation : $r_- \times r_+ = c_n^2$.
- Finalement, on a :

$$c_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}} \text{ et } a_{n+1} = 2^n c_n.$$

- On peut donc, en partant de $c_1 = \sqrt{2}$, calculer à la main ou à l'aide d'un ordinateur les quantités a_2, a_3, a_4.

- D'après la construction de ces quantités, on espère qu'elles se rapprochent du nombre π, ce qui s'écrit

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \pi.$$

- D'après la construction de ces quantités, on espère qu'elles se rapprochent du nombre π, ce qui s'écrit

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \pi.$$

- Regardons plutôt :

- D'après la construction de ces quantités, on espère qu'elles se rapprochent du nombre π, ce qui s'écrit

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \pi.$$

- Regardons plutôt :

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 2.8284271247\ldots, \quad a_3 = 3.0614674589\ldots$$
$$a_4 = 3.1214451523\ldots, \quad a_5 = 3.1365484905\ldots, \quad a_{10} = 3.1415877253\ldots$$
$$a_{15} = 3.1415926488\ldots, \quad a_{20} = 3.1415926536\ldots, \quad a_{25} = 3.1415926536\ldots$$

INTRODUCTION

- D'après la construction de ces quantités, on espère qu'elles se rapprochent du nombre π, ce qui s'écrit

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \pi.$$

- Regardons plutôt :

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 2.8284271247\ldots, \quad a_3 = 3.0614674589\ldots$$
$$a_4 = 3.1214451523\ldots, \quad a_5 = 3.1365484905\ldots, \quad a_{10} = 3.1415877253\ldots$$
$$a_{15} = 3.1415926488\ldots, \quad a_{20} = 3.1415926536\ldots, \quad a_{25} = 3.1415926536\ldots$$

- La suite des valeurs semble en effet se stabiliser près d'un nombre qui commence par $3,14159$

- D'après la construction de ces quantités, on espère qu'elles se rapprochent du nombre π, ce qui s'écrit
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \pi.$$
- Regardons plutôt :

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 2.8284271247\ldots, \quad a_3 = 3.0614674589\ldots$$
$$a_4 = 3.1214451523\ldots, \quad a_5 = 3.1365484905\ldots, \quad a_{10} = 3.1415877253\ldots$$
$$a_{15} = 3.1415926488\ldots, \quad a_{20} = 3.1415926536\ldots, \quad a_{25} = 3.1415926536\ldots$$

- La suite des valeurs semble en effet se stabiliser près d'un nombre qui commence par $3,14159$
- Évidemment, seule notre intuition géométrique nous dit que la suite des valeurs a_n converge (vers π). Et comme nous ne pouvons calculer une infinité de ces a_n, il ne nous est pas possible de voir qu'en effet on n'a pas de mauvaise surprise, par exemple pour a_{1000} ou $a_{10^{50}}$ etc...

- D'après la construction de ces quantités, on espère qu'elles se rapprochent du nombre π, ce qui s'écrit

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \pi.$$

- Regardons plutôt :

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 2.8284271247\ldots, \quad a_3 = 3.0614674589\ldots$$
$$a_4 = 3.1214451523\ldots, \quad a_5 = 3.1365484905\ldots, \quad a_{10} = 3.1415877253\ldots$$
$$a_{15} = 3.1415926488\ldots, \quad a_{20} = 3.1415926536\ldots, \quad a_{25} = 3.1415926536\ldots$$

- La suite des valeurs semble en effet se stabiliser près d'un nombre qui commence par $3,14159$
- Évidemment, seule notre intuition géométrique nous dit que la suite des valeurs a_n converge (vers π). Et comme nous ne pouvons calculer une infinité de ces a_n, il ne nous est pas possible de voir qu'en effet on n'a pas de mauvaise surprise, par exemple pour a_{1000} ou $a_{10^{50}}$ etc...
- *Dans la suite nous donneront des outils pour prouver que les a_n convergent.*