*Contrôle continu 3*
*Durée : 1 h*

## Exercice 1

Donner l'énoncé du théorème des accroissements finis.

## Exercice 2

**Dans cet exercice (et dans cet exercice seulement), on ne demande pas de justification de la réponse.**

1. Soit $f : ]0,1[ \to \mathbb{R}$ et $a \in ]0,1[$. Si $f$ est dérivable en $a$, $f$ est-elle nécessairement continue en $a$ ?
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{\pi}{2}$, existe-t-il $x \in ]0,1[$ tel que $\cos(f(x)) = \frac{1}{2}$ ?
3. On considère $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si c'est possible, donner l'équation de la tangente à sa courbe représentative en $x = 1$.
4. Déterminer, si c'est possible, la limite suivante :
$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{\sin x} .$$
5. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^3+x^2+x+2}{x^2+x+2}$ pour tout $x \geq 0$. La courbe représentative de $f$ admet-elle une asymptote en $+\infty$ ? Si oui, donner son équation.

## Exercice 3

**Dans cet exercice, on justifiera soigneusement toutes les réponses.**
On considère la fonction $f$ à valeurs réelles et définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

1. En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction $f$ est-elle continue ? dérivable ?
   On notera $D \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des points en lesquels $f$ est dérivable.
2. La fonction $f$ est-elle paire ?
3. Donner la valeur de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
4. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D$.
5. Pour quels $x \in D$ a-t-on $f'(x) = 0$ ? Même question avec $f'(x) < 0$ et $f'(x) > 0$.
6. Montrer que $f$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
7. Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.
8. Déterminer les extremas locaux de $f$. La fonction admet-elle un minimum ? un maximum ? Si oui, dire en quels points ils sont atteints.
9. Tracer la courbe représentative de $f$ sur $\mathbb{R}$.
10. Justifier que la fonction $f : ]0, +\infty[ \to ]0,1[$ est bijective. On note $g$ sa fonction réciproque.
11. En quels points $g$ est-elle continue ? dérivable ?
12. Donner explicitement la fonction $g$.
13. Tracer le graphe de $g$.