

Contrôle continu 3
Durée : 1 h

Exercice 1

Énoncer la formule de dérivation du produit (avec ses hypothèses).

Exercice 2

Dans cet exercice (et dans cet exercice seulement), on ne demande pas de justification de la réponse.

1. Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in]0, 1[$. Si f est continue en a , f est-elle nécessairement dérivable en a ?
2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{\pi}{2}$, existe-t-il $x \in]0, 1[$ tel que $\cos(f(x)) = \frac{1}{3}$?
3. On considère $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si c'est possible, donner l'équation de la tangente à sa courbe représentative en $x = 1$.
4. Déterminer, si c'est possible, la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \tan^2 x}{\sin x}.$$

5. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1}$ pour tout $x \geq 0$. La courbe représentative de f admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, donner son équation.

Exercice 3

Dans cet exercice, on justifiera soigneusement toutes les réponses.

On considère la fonction f à valeurs réelles et définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

1. En quels points de \mathbb{R} la fonction f est-elle continue ? dérivable ?
On notera $D \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des points en lesquels f est dérivable.
2. La fonction f est-elle paire ?
3. Donner la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
4. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D$.
5. Pour quels $x \in D$ a-t-on $f'(x) = 0$? Même question avec $f'(x) < 0$ et $f'(x) > 0$.
6. Montrer que f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
7. Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .
8. Déterminer les extremas locaux de f . La fonction admet-elle un minimum ? un maximum ? Si oui, dire en quels points ils sont atteints.
9. Tracer la courbe représentative de f sur \mathbb{R} .
10. Justifier que la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, 1[$ est bijective. On note g sa fonction réciproque.
11. En quels points g est-elle continue ? dérivable ?
12. Donner explicitement la fonction g .
13. Tracer le graphe de g .