Contrôle continu 3
Durée : 1 h

Exercice 1

Donner l'énoncé du théorème des accroissements finis.

Exercice 2

1. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ et $a \in]0,1[$. Si f est dérivable en a, f est-elle nécessairement continue en a ?
2. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = |x-1|$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? en 1 ? Est-elle lipschitzienne ?
3. On considère $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si c'est possible, donner l'équation de la tangente à sa courbe représentative en $x = 1$.
4. Déterminer, si c'est possible, la limite suivante :
$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{\sin x}.$$
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \left(\ln(x^2+2)\right)^{\frac{1}{2}}$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Calculer sa dérivée en tout point où c'est possible.
6. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^3+x^2+x+2}{x^2+x+2}$ pour tout $x \geq 0$. La courbe représentative de f admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, donner son équation.

Exercice 3

On considère la fonction f à valeurs réelles et définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{-x^2}.$$

1. En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction f est-elle continue ? dérivable ? Justifier dans chaque cas. On notera $D \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des points en lesquels f est dérivable.
2. La fonction f est-elle paire ? Justifier.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D$.
4. Pour quels $x \in D$ a-t-on $f'(x) = 0$? Même question avec $f'(x) < 0$ et $f'(x) > 0$.
5. Déterminer les extremas locaux de f. La fonction admet-elle un minimum ? un maximum ? Si oui, dire en quels points ils sont atteints.
6. Donner la valeur de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
7. La courbe représentative de f a-t-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, donner son équation cartésienne.
8. Dresser la tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
9. Montrer que f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$
10. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.
11. Tracer la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$.
12. Justifier que la fonction $f :]0, +\infty[\to]0, 1[$ est-elle bijective. On note g sa fonction réciproque.
13. En quels points g est-elle continue ? dérivable ? Cette réciproque est-elle monotone ? La tracer sur le même graphe que f.