INITIATION À L'ANALYSE

N. RAYMOND

TABLE DES MATIÈRES

Date: 5 septembre 2017.

Emploi du temps. Les cours commencent le vendredi 8 septembre. À titre indicatif, voici le déroulement approximatif :

1. Semaine du 11 septembre : Nombres réels, inégalités (F1)
2. Semaine du 18 septembre : Fonctions (F2)
3. Semaine du 25 septembre : **PC1**, Polynômes (F3)
4. Semaine du 2 octobre : Fractions (F4)
5. Semaine du 9 octobre : **GC1 (dominante analyse)**, Suites (F5)
6. Semaine du 16 octobre : Suites (F5)
7. Semaine du 23 octobre : **PC2**, Suites (F5)
8. Semaine du 30 octobre : Vacances
9. Semaine du 6 novembre : **GC2 (dominante arithmétique)**, notions de limite et de continuité (bref aperçu), dérivabilité (F6)
10. Semaine du 13 novembre : dérivabilité (F6)
11. Semaine du 20 novembre : intégration (F7)
12. Semaine du 27 novembre : **PC3**, intégration (F7)
13. Semaine du 4 décembre : à déterminer.

Contrôle continu.

Évaluation. **Les contrôles auront lieu les mardis après-midi.**

Il y aura

- trois petits contrôles de 20 min (**PC**) spécifiques à AN1,
- deux grands contrôles de 4h (**GC**) communs à AN1 et AR1,
- une évaluation "WIMS", W notée sur 2 points (de bonus).

La note du contrôle continu pour AN1 sera

$$CC = \frac{PC + 2GC1}{3} + W\,,$$

où

- PC est la moyenne des deux meilleures notes des petits contrôles, ramenée à 20,
- et où $GC1$ est la note du grand contrôle à dominante analyse, ramenée à 20.

La note finale F est obtenue par la formule

$$F = \max\left(\frac{CC+T}{2}, T\right)\,,$$

où T est la note de l'examen terminal de AN1.

En cas d'absence.

- En cas d'absence (justifiée ou non) au devoir long, aucun rattrapage ne sera organisé.
- En cas d'une absence (justifiée ou non) à un petit contrôle, on fait la moyenne des deux autres petits contrôles.
- En cas de deux ou trois absences justifiées, un oral sera proposé pour obtenir une note supplémentaire (pour faire la moyenne avec l'éventuelle note déjà obtenue).
- En cas d'au moins deux absences non justifées, on met 0.

1. PRÉLIMINAIRES

1.1. **Introduction.** Qu'est-ce que l'analyse ?

L'analyse est la branche des mathématiques qui étudie les limites et les inégalités. Historiquement, la notion de limite est apparue chez Zénon d'Élée au travers de ses célèbres paradoxes. Examinons l'un d'entre eux. Considérez un segment $[AB]$ et placez vous en A. Si vous souhaitez aller de A vers B, il faudra que vous passiez par le milieu C du segment. Puis de C, il vous restera $[CB]$ à parcourir. À nouveau, il vous faudra passer par le milieu de $[CB]$ si vous voulez atteindre C ; et ainsi de suite, à l'infini ! Jamais vous n'atteindrez C ! De nombreuses philosophies ont questionné directement ou indirectement ce paradoxe, de l'atomisme des épicuriens à la théorie bergsonienne du mouvement en passant par la physique aristotélicienne. Mais, comment les mathématiques y ont-elles répondu ? C'est ce que ce cours tentera d'expliquer par une présentation rigoureuse de la plupart des notions élémentaires faisant intervenir des limites. Nous verrons ainsi que plusieurs objets des mathématiques sont définis par le biais de limites, comme par exemple : les nombres réels, la racine carrée, la fonction exponentielle, le logarithme, les dérivées, les équations différentielles et beaucoup d'autres objets qui apparaissent dans les sciences chimiques, physiques et biologiques pour décrire les mouvements des atomes, des corps et des êtres vivants.

Bien sûr, pour des raisons de temps et de pédagogie, nous ne pourrons pas démontrer toutes les assertions ou définir parfaitement rigoureusement certaines notions ; le lecteur sera donc supposé avoir une intuition ou une familiarité raisonnable avec des idées mathématiques rencontrées dans son passé. Les énoncés marqués d'une étoile $\star$ doivent être connus, tandis que leurs preuves ne seront pas exigibles.

L'étudiant motivé pourra lire les énoncés marqués de deux étoiles $\star\star$ (qui visent des notions difficiles ou des définitions délicates) et qui dépassent le cadre de ce cours, ou consulter les Annexes traitant de sujets qui visent à appréhender la cohérence de ce cours.

1.2. **Rudiments logiques.** Dans ce cours, nous ferons usage des notions d'ensembles et d'opérations ensemblistes. Nous considérerons comme familières les notions d'ensembles et d'appartenance (notée $\in$).

1.2.1. *Ensembles.*

Définition 1.1.

i. Si A et B sont deux ensembles, on dira que $A \subset B$ quand $x \in A$ implique que $x \in B$. On dit dans ce cas que A est une partie de B.

ii. Si E est un ensemble et si A et B sont deux parties de E, leur réunion est
$$A \cup B = \{x \in E : x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\}\,.$$

iii. Si E est un ensemble et si A et B sont deux parties de E, leur intersection est
$$A \cap B = \{x \in E : x \in A \quad \text{et} \quad x \in B\}\,.$$

Le lecteur désirant plus de détails peut se référer à son cours favori de Logique et de Théorie des Ensembles.

1.3. **Les réels et les intervalles.** Donnons d'ores et déjà des exemples que nous rencontrerons tout au long de ce cours.

1.3.1. *Les nombres réels.* Les nombres réels, avec lesquels le lecteur est supposé familier, sont le fruit d'une longue construction historique et d'une conquête conceptuelle. Bornons nous à rappeler quelques rudiments et propriétés de ces nombres.

i. Les entiers naturels sont les nombres $0, 1, 2, 3, \cdots$ et leur ensemble est noté $\mathbb{N}$. On peut additionner deux entiers m et n et leur somme est notée $m + n$. L'addition est

   a. associative,

   b. commutative,

   c. et possède un élément neutre 0, c'est à dire : $n + 0 = 0 + n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Tout entier non nul n possède un prédécesseur, au sens où il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = k+1$. Nous pouvons aussi définir une multiplication entre entiers notée $\times$ qui est

   a. associative,

   b. distributive sur l'addition,

   c. commutative,

   d. et qui possède un élément neutre 1, c'est à dire : $n \times 1 = 1 \times n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii. Les entiers relatifs sont les nombres $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ et leur ensemble est noté $\mathbb{Z}$. L'addition de $\mathbb{N}$ peut être étendue en une addition sur $\mathbb{Z}$ et elle satisfait la propriété fondamentale que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe un unique $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $k + \ell = 0$. Cet unique ℓ n'est autre que $-k$. Grâce à $\mathbb{Z}$, nous savons désormais résoudre l'équation $x + 1 = 0$. On peut aussi étendre la multiplication aux entiers relatifs.

iii. Les nombres rationnels sont formés des quotients de nombres relatifs (par exemple $-\frac{1}{2}$, 0, 14). Leur ensemble est noté $\mathbb{Q}$. Étant donné $a \in \mathbb{Z}$ (non nul), nous pouvons maintenant résoudre par exemple $ax = 1$. Son unique solution est $x = \frac{1}{a} = a^{-1}$. $\mathbb{Q}$ possède une autre propriété que $\mathbb{Z}$ ne satisfait pas : entre deux rationnels distincts, il y a toujours un autre rationnel ! Mais il semble que certaines quantités géométriques ne se traduisent pas en termes rationnels (la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, le périmètre d'un disque de rayon 1)...

iv. Arrivent enfin les nombres réels qui complètent $\mathbb{Q}$ et permettent notamment de résoudre $x^2 = 2$ (dont l'unique solution positive est $\sqrt{2}$ et n'appartient pas à $\mathbb{Q}$) ou de mesurer le périmètre d'un cercle de rayon 1 (2π). $\mathbb{R}$ est muni d'une addition et d'une multiplication avec lesquelles le lecteur est familier.

1.3.2. *Borne supérieure.* $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ que le lecteur a déjà rencontrée plusieurs fois dans son existence mathématique.

Exemple 1.2. Soit a un réel positif. Montrer que si a est tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, $a \leq \varepsilon$, alors $a = 0$.

Lemme 1.3 ($\star$). *Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$. Cet entier est la partie entière de x, notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.*

Lemme 1.4 ($\star$). *$\mathbb{R}$ est archimédien, au sens où, pour tout $x, y > 0$, avec $x < y$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.*

Définition 1.5. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

i. On dit que A est majorée lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, on a $x \leq M$. Le nombre M s'appelle un majorant de A.

ii. On dit que A est minorée lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, on a $x \geq M$. Le nombre m s'appelle un minorant de A.

iii. On dit que A est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Notons que si M est un majorant de A alors tout nombre $M' \geq M$ est aussi un majorant. Le théorème suivant montre l'existence d'un plus petit majorant dans $\mathbb{R}$, qui est une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, que ne vérifie pas $\mathbb{Q}$. La même chose s'applique de manière analogue pour les minorants.

Définition 1.6. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

i. La borne supérieure de A, si elle existe, est le plus petit des majorants de A. On la note par $\sup A$ ou S, et concrètement c'est l'unique majorant S tel que tout autre majorant M est forcément plus grand que S.

ii. La borne inférieure de A, si elle existe, est le plus grand des minorants de A. On la note par $\inf A$ ou I, et concrètement c'est l'unique minorant S tel que tout autre minorant m est forcément plus petit que I.

Dans la suite nous allons énoncer un théorème (qu'on va admettre) concernant l'existence et la caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure.

Théorème 1.7 ($\star$)**.** *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

i. *Si A est majorée alors elle admet une borne supérieure et c'est l'unique nombre réel S vérifiant,*
   i. *S est un majorant de A,*
   ii. *$\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ tel que $a \geq S - \varepsilon$.*

   De plus, si M est un majorant de A, alors $S \leq M$.

ii. *Si A est minorée alors elle admet une borne inférieure et c'est l'unique nombre réel I vérifiant,*
   i. *I est un minorant de A,*
   ii. *$\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ tel que $a \leq I + \varepsilon$.*

   De plus, si m est un minorant de A, alors $m \leq I$.

Ce théorème est très utile pour montrer l'existence de réels vérifiant certaines propriétés.

Exemple 1.8. Considérons
$$A = \{x \in \mathbb{R}\,, x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{R}\,.$$
Montrer que A est non vide et majorée. Notant S sa borne supérieure, montrer que $S^2 = 2$. Que vient-on de montrer ? Combien l'équation $x^2 = 2$ admet-elle de solutions dans $\mathbb{R}$?

1.3.3. *Intervalles de* $\mathbb{R}$.

Définition 1.9. On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

i. $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (intervalle fermé borné appelé aussi segment),
ii. $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (semi-ouvert à gauche ou semi-fermé à droite),
iii. $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$,
iv. $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (intervalle ouvert),
v. $[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ (demi-droite fermée à gauche),
vi. $]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ (demi-droite ouverte à gauche),
vii. $]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ (demi-droite fermée à droite),
viii. $]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ (demi-droite ouverte à droite),

ix. $\varnothing$ (ensemble vide),

x. $\mathbb{R}$ (droite réelle),

avec a et b des réels tels que $a \leq b$.

Exemple 1.10. Les ensembles suivants sont-ils des intervalles :

$$[0,1] \cup [1,5]\,,\{\pi\}\,,[-3,-1] \cup]1,+\infty[\,,[-3,-1] \cap]1,+\infty[\quad ?$$

Justifier.

Proposition 1.11 (Caractérisation des intervalles, admis)**.** *Une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $x, y \in A$ avec $x \leq y$, on a $[x, y] \subset A$.*

Démonstration. Traitons le cas où A est non vide et bornée, les autres cas se traitant par des idées similaires. La condition nécessaire est facile à vérifier ; il suffit juste de se référer à la classification des intervalles. Démontrons maintenant que la condition est suffisante. Notons γ la borne supérieure de A et δ sa borne inférieure. On a, par définition, $A \subset [\delta, \gamma]$. Vérifions que $]\delta, \gamma[\subset A$. Soit $x \in]\delta, \gamma[$. Par définition des bornes inférieures et supérieures, on en déduit l'existence de $x_1 \in A$ et $x_2 \in A$ tels que $\delta < x_1 < x < x_2 < \gamma$. On a $[x_1, x_2] \subset A$ et donc $x \in A$. On en conclut que $]\delta, \gamma[\subset A \subset [\delta, \gamma]$. ☐

Définition 1.12. On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert rencontre A.

Nous montrerons plus tard la proposition suivante.

Proposition 1.13. *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.*

Proposition 1.14. $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Montrons que tout segment ouvert $]a, b[$ contient un rationnel. Si $b - a \geq 2$, $]a, b[$ contient un élément de $\mathbb{Z}$. Sinon, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n(b - a) \geq 2$ et alors $]na, nb[$ contient un élément de $\mathbb{Z}$. Par suite, $]a, b[$ contient un rationnel. ☐

Proposition 1.15. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Considérons le segment ouvert $]a, b[$. Il contient un rationnel q par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, on peut vérifier qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{b-q}{2}\,,$$

si bien que

$$a < q + \frac{\sqrt{2}}{n} < b\,.$$

On vérifie aisément que $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est irrationnel puisque $\sqrt{2}$ est lui-même irrationnel. ☐

1.3.4. *Valeur absolue.*

Définition 1.16. Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit

$$|x| = \max(x, -x)\,, \quad x_+ = \max(x, 0)\,, \quad x_- = \max(-x, 0)\,.$$

Proposition 1.17. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :*

$$|x| = x_+ + x_-\,, \quad x = x_+ - x_-\,.$$

2. Généralités sur les fonctions de la variable réelle

Nous avons précédemment introduit la notion de fonction ou d'application. Nous allons désormais parler des fonctions de la variable réelle et à valeurs dans $\mathbb{R}$. **On ne saurait trop insister sur le fait qu'une fonction est la donnée d'un ensemble de départ (le domaine de définition) et d'un ensemble d'arrivée !**

2.1. Fonctions, applications.

2.1.1. *Quelques notions.*

Définition 2.1 (Application)**.** Une application (ou fonction) f est la donnée d'un ensemble de départ A et d'un ensemble d'arrivée B et qui, à chaque $x \in A$ associe un unique $f(x) \in B$. On note $f : A \to B$ et on écrit aussi $x \ni A \mapsto f(x) \in B$.

On considère, juqu'à la fin de cette section, les fonctions suivantes

i. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$,

ii. $f_2 :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$,

iii. $f_3 :]-\infty, 0[\to [0, +\infty[$, $f_3(x) = x^2$.

Exemple 2.2. A-t-on $f_1 = f_2$?

Définition 2.3 (Graphe d'une application)**.** Soit $f : A \to B$ une application. On appelle graphe de f l'ensemble suivant

$$\mathrm{Graphe}(f) = \{(x, f(x)), x \in A\} \subset A \times B .$$

Exemple 2.4. Dessiner les graphes de f_1, f_2 et f_3.

Définition 2.5 (Image, antécédent)**.** Soit $f : A \to B$ une application. Soient $x \in A$ et $y \in B$ tels que $y = f(x)$. On dit que y est l'image de x par f et que x est un antécédent de y par f. Si $A' \subset A$, on note $f(A')$ l'ensemble des images des éléments de A'.

Exemple 2.6. Trouver l'image de 4 par f_1. Quels sont tous les antécédents de 4 par f_1 ? Que vaut $f_1([-1, 5[)$?

Définition 2.7 (Injectivité)**.** Soit $f : A \to B$ une application. On dit que f est injective lorsque tout élément de B possède au plus un antécédent par f. Autrement dit, f est injective si et seulement si

$$\text{si} \quad f(x) = f(y) \quad \text{alors} \quad x = y.$$

Exemple 2.8. f_1 est-elle injective ? Et f_2 ?

Définition 2.9 (Surjectivité)**.** Soit $f : A \to B$ une application. On dit que f est surjective lorsque tout élément de B possède au moins un antécédent.

Exemple 2.10. f_1 est-elle surjective ?

Définition 2.11 (Bijectivité)**.** Soit $f : A \to B$ une application. On dit que f est bijective quand elle est à la fois injective et surjective.

Exemple 2.12. Parmi f_1, f_2 et f_3, y a-t-il une fonction bijective ? Lesquelles ? Justifier.

2.2. Exemples classiques de fonctions.

2.2.1. *Les fonctions du second degré.* Nous allons maintenant parler des fonctions du second degré et de leurs zéros.

Proposition 2.13. *Soit* $(a, b, c) \in \mathbb{R}$ *avec* $a \neq 0$ *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) = ax^2 + bx + c\,.$$

On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$*. Alors, l'équation* $f(x) = 0$ *possède des solutions si et seulement si* $\Delta \geq 0$*. Plus précisément :*

- si $\Delta > 0$*, il y a deux solutions distinctes* x_1 *et* x_2 *données par*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\,, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\,.$$

- si $\Delta = 0$*, il n'y a qu'une seule solution :*

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}\,.$$

Lorsque $\Delta \geq 0$*, on peut écrire, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,*

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\,,$$

et on a les relations :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\,, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}\,.$$

Enfin, si $\Delta < 0$*, soit* f *ne prend que des valeurs positives, soit elle ne prend que des valeurs négatives.*

Démonstration. On écrit simplement que :

$$ax^2 + bx + c = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right\}\,,$$

et les conséquences s'en déduisent aisément. $\square$

2.2.2. *Autres exemples.* Donnons tout de suite des exemples de fonctions qu'on rencontrera souvent et dont on montrera certaines propriétés plus tard :

i. Les fonctions polynomiales sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui se présentent sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\,,$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels donnés. Pour f non identiquement nulle on $a_n \neq 0$ et on l'appelle le coefficient dominant.

ii. La fonction logarithme népérien $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction qui vérifie $\ln(1) = 0$ et la remarquable propriété :

$$\forall x, y > 0 \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)\,.$$

Elle peut être définie au moyen de l'intégrale :

$$\forall x > 0\,, \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{u} \mathrm{d}u\,.$$

iii. La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ qui est la fonction réciproque de $\ln$ dans le sens où : $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(\exp(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Noter que $e = \exp(1)$ est le nombre d'Euler.

iv. Pour $a > 0$, on définit la fonction sur $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x := \exp(x \ln(a)) \in]0, +\infty[$. Cela justifie la notation $\exp(x) = e^x$. On observe aussi que, quand x est un entier, $\exp(x \ln(a)) = (\exp(\ln(a)))^x = a \times a \times \ldots \times a$.

v. Les fonctions trigonométriques cos, sin sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$. La fonction tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}\} \qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,.$$

2.3. **Opérations sur les fonctions.**

2.3.1. *Somme et produit de fonctions.* Les fonctions qu'on considère sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui est muni d'une addition et d'une multiplication. Nous allons pouvoir donner un sens à ces opérations pour les fonctions (dès qu'elles sont définies sur le même ensemble et à valeurs dans le même ensemble).

Définition 2.14. Soient $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. la somme de f et g comme la fonction $s = f + g$ définie par : pour tout $x \in A$, $s(x) = f(x) + g(x)$,

ii. la produit de f et g comme la fonction $p = fg$ définie par : pour tout $x \in A$, $g(x) = f(x)g(x)$,

iii. le produit de f par λ comme la fonction $w = \lambda f$ définie par : pour tout $x \in A$, $w(x) = \lambda f(x)$.

Exemple 2.15. Donner une partie de $\mathbb{R}$, la plus grande possible, sur laquelle la somme des fonctions suivantes est bien définie : $f : x \in [0, +\infty[\mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \in] - 1, +\infty[\mapsto \ln(x + 1)$.

2.3.2. *Composition de fonctions.*

Définition 2.16. Soient $A, B, C \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$, $g : B \to C$. On définit la fonction $g \circ f : A \to C$ par :

$$\forall x \in A\,, \quad g \circ f(x) = g(f(x))\,.$$

Exemple 2.17. Soient $f : x \in [0, +\infty[\mapsto \sqrt{x} \in [0, +\infty[$ et $g : x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(x+1) \in \mathbb{R}$. $g \circ f$ est-elle bien définie ? Et $f \circ g$? En réduisant le domaine de définition de g et son ensemble d'arrivée, montrer que la composée de f avec cette nouvelle fonction est bien définie.

2.4. **Propriétés remarquables des fonctions.**

2.4.1. *Fonctions majorées, minorées et bornées.*

Définition 2.18. Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$.

i. On dit que f est majorée lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, on a $f(x) \leq M$. M est alors appelé majorant de f.

ii. On dit que f est minorée lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, on a $f(x) \geq m$. m est alors appelé minorant de f.

iii. On dit que f est bornée lorsque elle est à la fois majorée et minorée.

2.4.2. *Fonctions monotones.*

Définition 2.19. Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$.

i. On dit que f est croissante lorsque pour tout $(x, y) \in A^2$, si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$.
ii. On dit que f est décroissante lorsque pour tout $(x, y) \in A^2$, si $x \leq y$ alors $f(y) \leq f(x)$.
iii. On dit que f est monotone lorsque f est croissante ou décroissante.

De même, on définit les fonctions strictement croissantes et strictement décroissantes en remplaçant partout $\leq$ par $<$ et on parle de même de fonctions strictement monotones.

Exemple 2.20. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ est croissante. Pour ces n, la fonction est-elle strictement croissante ? Mêmes questions pour $x \in]0, +\infty[\mapsto x^n \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.21. La fonction $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ est-elle décroissante ?

Proposition 2.22 ($\star\star$)**.** *Soit $f : A \to \mathbb{R}$. Alors f n'est pas monotone si et seulement si il existe $(x, y, z) \in A^3$ vérifiant $x < y < z$ et tels que*

$$(f(x) < f(y) \,\text{et}\, f(z) < f(y)) \quad \textit{ou} \quad (f(y) < f(x) \,\text{et}\, f(y) < f(z))\,.$$

2.4.3. *Fonctions périodiques.*

Définition 2.23. Soit $f : A \to \mathbb{R}$. On dit que f est périodique lorsqu'il existe $p \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$A + p = A\,, \quad \forall x \in A\,, \quad f(x + p) = f(x)\,.$$

Dans ce cas, on dit que p est une période. Notons que $A + p := \{x + p, x \in A\}$.

Proposition 2.24 ($\star\star$)**.** *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction périodique. Si $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des périodes (auquel on ajoute 0), alors, si $p_1 \in \mathcal{P}$ et $p_2 \in \mathcal{P}$, on a aussi $p_1 \pm p_2 \in \mathcal{P}$. De plus, f possède une période strictement positive.*

Définition 2.25. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique. Si $\mathcal{P} \cap]0, +\infty[$ possède un minimum (non nul), ce nombre est appelé la période de f.

Exemple 2.26. Les fonctions $\cos$ et $\sin$ admettent pour périodes les nombres $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Leur période est 2π. La période de la fonction $\tan$ est π.

2.4.4. *Symétries.*

Définition 2.27. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$.

i. On dit que f est paire si pour tout $x \in A$ on $-x \in A$ et $f(x) = f(-x)$.
ii. On dit que f est impaire si pour tout $x \in A$ on a $-x \in A$ et $f(x) = -f(-x)$.

Proposition 2.28 ($\star$)**.** *Soient $S_{(Oy)} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (-x, y) \in \mathbb{R}^2$ la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et $S_O : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (-x, -y) \in \mathbb{R}^2$ la symétrie centrale de centre $(0, 0)$. Alors, les assertions suivantes sont vraies.*

i. *Une fonction f est paire si et seulement si $S_{(Oy)}(\mathrm{Graphe}(f)) = \mathrm{Graphe}(f)$.*
ii. *Une fonction f est impaire si et seulement si $S_O(\mathrm{Graphe}(f)) = \mathrm{Graphe}(f)$.*

Définition 2.29. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$. Soit $a \in A$. On dit que f est paire par rapport à a quand la fonction g définie sur $A - a$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par, $g(x) = f(a + x)$, pour tout $x \in A - a$, est une fonction paire. On dit que f est impaire par rapport au point $I = (a, b)$ si la fonction $h : A \ni x \mapsto f(x + a) - b$ est impaire.

i. f est paire par rapport à a si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe $x = a$.

ii. f est impaire par rapport à $I(a,b)$ si et seulement si son graphe est symétrique par rapport au point $I(a,b)$, ou encore

$$\forall x \in A, \quad \text{on a} \quad -x+a \in A \quad \text{et} \quad f(a+x)+f(a-x)=2b$$

Exemple 2.30. La fonction $f : [0,+\infty[\ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est-elle paire ? Et la fonction $g :]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\ni x \mapsto \frac{x^2-4}{1+x^{20}} \in \mathbb{R}$?

Exemple 2.31. Déterminer un axe de symétrie pour le graphe de $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2+3x-4 \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.32. Trouver un centre de symétrie pour la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3-3x^2+4x-2 \in \mathbb{R}$. En déduire un point par rapport auquel le graphe de la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3-3x^2+4x \in \mathbb{R}$ est symétrique.

3. Polynômes et fractions rationnelles

Dans cette section, nous allons étudier les propriétés de certaines fonctions particulières qu'on rencontre à de nombreuses occasions. Nous supposerons famili'eres les notions de polynômes et de fractions rationnelles. Dans ce qui suit, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

3.1. **Polynômes.** On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Cet ensemble est muni d'une addition et d'une multiplication (commutatives) supposées connues.

Définition 3.1. Dans $\mathbb{K}[X]$, X s'appelle l'indéterminée.

Exemple 3.2. On pose $P=1+X+X^2$ et $Q=1-X$. Alors $P+Q=Q+P=2+X^2$ et $PQ=QP=1-X^3$.

Exemple 3.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P_n=1+X+X^2+\ldots+X^n$. Donner une expression simple pour $(1-X)P_n$.

Exemple 3.4. Soit $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $X^n-a^n=(X-a)Q$.

Proposition 3.5 ($\star$)**.** *Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe une unique suite de scalaires $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, nulle à partir d'un certain rang telle que :*

$$P=\sum_{j\geq 0} a_j X^j .$$

Cette suite est la suite des coefficients du polynôme.

Proposition 3.6 ($\star$)**.** *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul. On écrit $P=\sum_{j=0}^n a_j X^j$ et on considère*

$$A=\{j \in \mathbb{N} : a_j \neq 0\} .$$

A possède un plus grand élément qui s'appelle le degré de P, noté $\deg P$. Le coefficient $a_{\deg P} \neq 0$ s'appelle le coefficient dominant de P.

Définition 3.7. Lorsque $P=0$, on écrit $\deg P=-\infty$.

Exemple 3.8. Si $P=2+X+X^4$, alors $\deg P=4$. Si $P=X^6-\pi X+3X^2+X^5$, $\deg P=6$.

Proposition 3.9. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors P s'écrit sous la forme*

$$P=\sum_{j=0}^{\deg P} a_j X^j .$$

Proposition 3.10 ($\star$)**.** *Soit $P,Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors*

$$\deg(PQ)=\deg P+\deg Q , \quad \deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q) .$$

Exemple 3.11. On prend $P=-2X^2+X+1$ et $Q=2X^2+3$. Quel est le degré de $P+Q$?

3.2. **Racines.**

3.2.1. *Définitions.* À tout polynôme, on peut associer une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{K}$.

Définition 3.12. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. La fonction $\mathbb{K} \ni x \mapsto P(x) = \sum_{j=0}^{\deg P} a_j x^j \in \mathbb{K}$ s'appelle la fonction polynomiale associée à P.

Définition 3.13. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $x_0 \in \mathbb{K}$ est racine de P lorsque $P(x_0) = 0$.

Exemple 3.14. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, trouver les racines de $X^2 + X + 2$.

Exemple 3.15. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, trouver les racines de $X^2 + X + 2$.

Exemple 3.16. Trouver les racines dans $\mathbb{C}[X]$ de $X^2 - a$ où a est un nombre complexe fixé.

Exemple 3.17. Trouver les racines dans $\mathbb{C}[X]$ des polynômes de degré 2.

Proposition 3.18. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $x_0 \in \mathbb{K}$ une racine de P. Alors, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - x_0)Q$.*

Définition 3.19. On dit que $x_0 \in \mathbb{K}$ une racine de P de multiplicité $m \geq 1$ lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X - x_0)^m Q \,, \qquad Q(x_0) \neq 0 \,.$$

On dit aussi que x_0 est une racine multiple d'ordre m. Une racine est dite simple lorsqu'elle est de multiplicité 1.

3.2.2. *Notion de polynôme dérivé et relation avec les racines.*

Définition 3.20. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On écrit

$$P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \,.$$

Le polynôme dérivé de P est défini par

$$P' = \sum_{j=1}^{n} j a_j X^{j-1} \,.$$

Proposition 3.21 ($\star$). *Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors*

$$(P+Q)' = P' + Q' \,, \quad (PQ)' = P'Q + PQ' \,.$$

Exemple 3.22. Quel est le polynôme dérivé de $(X - a)^m$, où $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$?

Proposition 3.23. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$ une racine de P. Alors, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que*

$$P = (X - a)Q \,,$$

avec $Q(a) = P'(a)$.

Proposition 3.24. *Si x_0 est racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ de multiplicité m, alors elle est racine de P' avec multiplicité $m - 1$.*

3.2.3. *Polynômes scindés.*

Proposition 3.25. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, de degré $n \geq 1$. Alors P possède au plus n racines dans $\mathbb{K}$ (avec multiplicité).*

Corollaire 3.26. *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ qui possède une infinité de racines est nul.*

Théorème 3.27 ($\star$ D'Alembert-Gauss)**.** *Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ possède une racine dans $\mathbb{C}$.*

Corollaire 3.28 ($\star$)**.** *Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé dans $\mathbb{C}$, c'est à dire qu'il existe $(r_j)_{1\leq j\leq \deg P} \in \mathbb{C}^{\deg P}$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que*

$$P = c \prod_{j=1}^{\deg P} (X - r_j)\,.$$

De plus, c est le coefficient dominant de P et le nombre de fois où une racine est répétée est sa multiplicité.

Proposition 3.29 ($\star\star$ Relations coefficients-racines)**.** *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On écrit $P = \sum_{\ell=0}^{\deg P} p_\ell X^\ell$. On écrit par ailleurs*

$$P = c \prod_{j=1}^{\deg P} (X - r_j)\,.$$

Alors

$$p_0 = c(-1)^{\deg P} \prod_{\ell=1}^{\deg P} r_j\,, \qquad p_1 = -c \sum_{\ell=1}^{\deg P} r_j\,.$$

Exemple 3.30. Écrire les relations coefficients-racines dans le cas d'un polynôme de degré 2.

3.3. **Divisibilité des polynômes.**

Définition 3.31. On dit que $B \in \mathbb{K}[X]$ divise $A \in \mathbb{K}[X]$ lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. On dit que B est un diviseur de P.

Exemple 3.32. Tout polynôme constant et non nul divise n'importe quel polynôme.

Exemple 3.33. Si x_0 est racine de $A \in \mathbb{K}[X]$, alors $X - x_0$ divise A.

Exemple 3.34. Montrer que $X^2 - 2$ divise $X^4 - X^2 - 2$.

Proposition 3.35 ($\star$ Division euclidienne des polynômes)**.** *Soient $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $\deg R < \deg B$ tel que*

$$A = BQ + R\,.$$

Q s'appelle le quotient et R le reste.

Exemple 3.36. On prend $A = X^4 - 2X^2 + X - 3$ et $B = X^2 + 1$. Trouver Q et R.

3.4. **Polynômes irréductibles et factorisation.**

3.4.1. *Irréductibilité.*

Définition 3.37. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible lorsqu'il ne peut pas s'écrire comme le produit de deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degrés au moins 1.

Exemple 3.38. $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, mais pas dans $\mathbb{C}[X]$.

Proposition 3.39. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont de degré 1.*

Proposition 3.40. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont soit les polynômes de degré 1, soit les polynômes de degré 2 n'ayant aucune racine réelle.*

Proposition 3.41 ($\star\star$)**.** *Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non constant est divisible par un polynôme irréductible.*

Proposition 3.42 ($\star\star$)**.** *Soit $H_1 \in \mathbb{K}[X]$ et $H_2 \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes irréductibles. Si H_1 divise H_2, alors il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que*

$$H_2 = cH_1 \,.$$

3.4.2. *Polynômes premiers entre eux.*

Définition 3.43 ($\star\star$)**.** On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux lorsqu'ils ne possèdent pas de divisieur commun autre que les polynômes constants.

Proposition 3.44 ($\star\star$)**.** *$P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de facteur irréductible commun.*

Proposition 3.45 ($\star\star$)**.** *$P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$. En particulier, deux polynômes à coefficients réels sont premiers entre eux sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'ils sont premiers entre eux sur $\mathbb{C}$.*

Exemple 3.46 ($\star\star$)**.** $X^2 - 2$ et $X^2 + 2$ sont premiers entre eux.

3.4.3. *Décomposition en produit d'irréductibles.*

Proposition 3.47 ($\star\star$)**.** *Tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ peut se factoriser sous la forme d'un produit de polynômes irréductibles mutuellement premiers entre eux (c'est à dire sans racine commune) :*

$$P = \prod_{j=1}^{k} H_j^{m_j} \,.$$

Cette factorisation est unique à l'ordre des facteurs près et à multiplication d'une constante près.

Exemple 3.48 ($\star\star$)**.** Factoriser en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^3 + X - 2$. Même question dans $\mathbb{C}[X]$.

Proposition 3.49 ($\star\star$)**.** *$P \in \mathbb{K}[X]$ n'a que des racines de multiplicité 1 si et seulement si P et P' sont premiers entre eux.*

3.5. **Fractions rationnelles.**

3.5.1. *Propriétés générales.* On considère maintenant l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$. C'est l'ensemble des "quotients" de polynômes

$$\mathbb{K}(X) = \left\{ \frac{P}{Q}, \quad (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^* \right\} .$$

On a $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$. Cet ensemble est muni d'une addition et d'une multiplication supposés familières. Si $F \in \mathbb{K}(X)$, elle s'écrit sous la forme

$$F = \frac{P}{Q}$$

avec P et $Q \neq 0$ deux polynômes. Lorsque F est écrite sous cette forme, on dit que P est le numérateur et Q le dénominateur. On observe cependant que cette écriture n'est pas unique (on peut parfois "simplifier la fraction").

Exemple 3.50. Écrire la fraction rationnelle suivante sous la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont des polynômes :

$$X + \frac{1}{X} + \frac{X+1}{X-2} + \frac{X^2}{X-1}\,.$$

Exemple 3.51. On a

$$\frac{X^3-1}{X-1} = \frac{X^2+X+1}{1} = X^2+X+1\,.$$

Définition 3.52. On dit que $F \in \mathbb{K}(X)$ est écrite sous forme irréductible lorsqu'elle se présente sous la forme

$$F = \frac{P}{Q}\,,$$

où P et Q n'ont pas de diviseurs communs.

Exemple 3.53. Écrire les fractions suivantes sous une forme irréductible :

$$\frac{X^3-3X^2+X+1}{X^2-1}\,, \qquad \frac{X^2+4}{X^4+1}\,.$$

Exemple 3.54. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ qui n'a que des racines de multiplicité 1. Alors, la fraction $\frac{P'}{P}$ est irréductible.

Proposition 3.55. *Si $F \in \mathbb{K}(X)$ et qu'on l'écrit $F = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$, on a $\deg P_1 - \deg Q_1 = \deg P_2 - \deg Q_2$. Cette valeur commune est le degré de F.*

Exemple 3.56. Donner le degré de $\frac{X^2}{X-1}$, $\frac{1}{X}$.

3.5.2. *Racines et pôles.*

Lemme 3.57. *Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ écrite de façon irréductible $F = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$. Alors les racines de P_1 et les racines de P_2 sont les mêmes (avec multiplicité). Il en est de même pour les racines de Q_1 et Q_2.*

Définition 3.58. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ écrite de façon irréductible $F = \frac{P}{Q}$. On appelle racines de F les racines de P et pôles de F les racines de Q. Un pôle d'ordre m de F est une racine d'ordre m de Q.

Définition 3.59. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ écrite de façon irréductible $F = \frac{P}{Q}$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de F. On peut définir la fontion rationnelle $f : \mathbb{K} \setminus \mathcal{P} \ni x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ associée à F.

3.5.3. *Décomposition en éléments simples.*

Exemple 3.60. Montrer qu'il existe des réels a, b, c et d tels que

$$\frac{X^3}{(X-1)(X-2)} = aX + b + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X-2}\,.$$

Nous allons montrer que cet exemple reflète une propriété générale, appelée décomposition en éléments simples.

Lemme 3.61 ($\star\star$)**.** *Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ avec $\deg F \geq 1$. Il existe un unique polynôme P de degré $\deg F$ et une unique fraction rationnelle G telle que $\deg G < 0$ telle que*

$$F = P + G\,.$$

P s'appelle la partie entière de F.

Exemple 3.62. On pose $F = \frac{1}{X}$, trouver P et G. Même question avec $F = \frac{X^5+1}{(X+2)^2}$.

Lemme 3.63 ($\star\star$)**.** *Soit $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$. Supposons que A et B sont étrangers. Alors, il existe un unique couple de polynômes $(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $\deg Q_1 < \deg A$ et tels que*

$$\frac{P}{AB} = \frac{Q_1}{A} + \frac{Q_2}{B}\,.$$

Exemple 3.64. On prend $P = X$, $A = X - 1$ et $B = (X - 2)^2$. Trouver les polynômes Q_1 et Q_2.

Lemme 3.65 ($\star\star$)**.** *Soit $P, H \in \mathbb{K}[X]$ avec H irréductible. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\deg \frac{P}{H^n} < 0$. Alors il existe un unique n-uplet de polynômes $(P_j)_{1\leq j\leq n}$ tel que, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\deg P_j < \deg H$ et*

$$\frac{P}{H^n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j}{H^j}\,.$$

Exemple 3.66. On prend $P = X^2$, $H = X - 1$ et $n = 3$. Trouver les polynômes P_j.

Théorème 3.67 ($\star\star$ Décomposition en éléments simples)**.** *Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On écrit*

$$F = \frac{P}{Q}\,,$$

On décompose Q en produit de polynômes d'irréductibles :

$$F = \frac{P}{\prod_{j=1}^{k} H_j^{m_j}}\,.$$

Il existe un unique polynôme P_0 (la partie entière de F) et une unique famille de polynômes $(Q_{j,\ell})_{\substack{1\leq j\leq k\\ 1\leq \ell\leq m_j}}$ avec $\deg Q_{j,\ell} < \deg H_j$ et telle que

$$F = P_0 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_j} \frac{Q_{j,\ell}}{H_j^{\ell}}\,.$$

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le théorème prend la forme suivante.

Théorème 3.68 ($\star$ Décomposition en éléments simples)**.** *Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. On écrit*

$$F = \frac{P}{Q}\,.$$

On suppose que Q s'écrit

$$\prod_{j=1}^{k} (X - \alpha_j)^{m_j}\,,$$

où les α_j sont les racines distinctes de Q.

Il existe un unique polynôme P_0 (la partie entière de F) et une unique famille de nombres complexes $(Q_{j,\ell})_{\substack{1\leq j\leq k\\ 1\leq \ell\leq m_j}}$ telle que

$$F = P_0 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{m_j} \frac{Q_{j,\ell}}{(X - \alpha_j)^{\ell}}\,.$$

Exemple 3.69. La fraction suivante est-elle irréductible ? Quels sont ses racines, ses pôles (et leurs ordres) ? La décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\frac{X^4}{(X^2 + 1)(X - 1)}\,.$$

Exemple 3.70. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ la fraction

$$\frac{X^4}{(X^2+1)(X-1)^2}\,.$$

Exemple 3.71. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction

$$\frac{X^4}{(X^2+1)(X-1)}\,.$$

Proposition 3.72. *Si $F \in \mathbb{K}(X)$, on écrit de façon irréductible $F = \frac{P}{Q}$ et on suppose que F possède un pôle simple a. Alors le polynôme qui apparaît au numérateur du terme $\frac{1}{X-a}$, dans la décomposition en éléments simples, est constant et cette constante vaut $\frac{P(a)}{Q'(a)}$. En d'autres termes, on peut écrire :*

$$F = G + \frac{P(a)}{Q'(a)}\frac{1}{X-a}\,,$$

où $G \in \mathbb{K}(X)$ n'admet pas a comme pôle.

Proposition 3.73. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On écrit $P = c\prod_{k=1}^{k}(X-r_j)^{m_j}$ où les r_j sont les racines disctinctes de P et c le coefficient dominant de P. Alors les pôles de $\frac{P'}{P}$ sont simples et la décomposition en éléments simples est donnée par :*

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{k}\frac{m_j}{X-r_j}\,.$$

4. Suites de nombres réels

4.1. **Suites, exemples.**

4.1.1. *Qu'est-ce qu'une suite ?*

Définition 4.1. On appelle suite de nombres réels toute application de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si u est une suite, on note, pour $n \in \mathbb{N}$, $u(n) = u_n$; c'est le terme général de la suite. La suite u est aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 4.2. Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite u de terme général $u_n = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite constante.

Définition 4.3 (Suite extraite)**.** Soit u une suite and $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On dit que $u \circ \varphi$ est une suite extraite de u.

Lemme 4.4. *Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.*

4.1.2. *Opérations sur les suites.*

Définition 4.5. On définit :

i. la somme de deux suites u et v comme la suite $s = u + v$ de terme général $s_n = u_n + v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
ii. la produit de deux suites u et v comme la suite $s = uv$ de terme général $p_n = u_n v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
iii. le produit d'une suite u par un réel λ comme la suite $w = \lambda u$ de terme général $w_n = \lambda u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le lecteur vérifiera que λu est aussi la suite obtenue en faisant le produit de la suite constante égale à λ et de la suite u.

4.1.3. *Suites arithmétiques et géométriques.*

Définition 4.6 (Suite arithmétique)**.** Soit u une suite de réels. On dit que u est une suite arithmétique quand il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r\,.$$

Ce nombre r (unique) est appelé la raison de la suite.

Définition 4.7 (Suite géométrique)**.** Soit u une suite de réels. On dit que u est une suite géométrique quand il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = r u_n\,.$$

Ce nombre r est appelé la raison de la suite. Si u_0 est différent de 0, ce r est unique.

Proposition 4.8. *On a les assertions suivantes.*

i. *Si u est une suite arithmétique de raison r, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.*
ii. *Si u est une suite géométrique de raison r, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 r^n$.*

4.1.4. *Suites arithmético-géométriques.*

Définition 4.9 (Suite arithmético-géométrique)**.** Soit u une suite de réels. On dit que u est une suite arithmético-géométrique lorsqu'il existe $g, a \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = g u_n + a\,.$$

Proposition 4.10. *Soit u est une suite arithmético-géométrique. On suppose que $g \neq 1$. On pose $\ell = \frac{a}{1-g}$. On a*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \ell + (u_0 - \ell) g^n\,.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = u_n - \ell\,.$$

La suite v est géométrique de raison g. $\square$

4.1.5. *Récurrences linéaires d'ordre deux à coefficients constants.* Commençons par un exemple.

Exemple 4.11. Trouver deux suites géométriques de raisons distinctes, r_1 et r_2, qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0\,. \tag{4.1}$$

Montrer ensuite que si u vérifie (4.1), il existe deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a r_1^n + b r_2^n\,.$$

On exprimera a et b en fonction de u_0 et u_1. On examinera la suite $(u_{n+1} - r_1 u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On considère les suites telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+2} + \alpha u_{n+1} + \beta u_n = 0\,. \tag{4.2}$$

On note $r_1 \in \mathbb{C}$ et $r_2 \in \mathbb{C}$ les racines du polynôme $P = X^2 + \alpha X + \beta$.

Proposition 4.12. *Si les racines de P sont distinctes, pour toute suite u vérifiant* (4.2)*, on peut trouver $a, b \in \mathbb{C}$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_n = a r_1^n + b r_2^n\,.$$

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{C}$ un nombre à déterminer. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - r_1 u_n \,.$$

Examinons

$$v_{n+1} = u_{n+2} - r_1 u_{n+1} = -\alpha u_{n+1} - \beta u_n - r_1 u_{n+1} \,.$$

On déduit, par les relations coefficients-racines,

$$v_{n+1} = u_{n+2} - r_1 u_{n+1} = r_2 u_{n+1} - r_1 r_2 u_n - r_1 = r_2 v_n \,.$$

De la sorte, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - r_1 u_n = (u_1 - r_1 u_0) r_2^n \,.$$

De la même façon, on trouve

$$u_{n+1} - r_2 u_n = (u_1 - r_2 u_0) r_1^n \,.$$

Par soustraction, le résultat s'ensuit. □

Exemple 4.13. Donner une expression explicite du terme général des suites qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N} \,, \quad u_{n+2} + u_{n+1} + 1 = 0 \,, \tag{4.3}$$

et $u_0 = u_1 = 1$.

Proposition 4.14. *Si les racines de P sont égales $r_1 = r_2 = r \neq 0$, pour toute suite u vérifiant (4.2), on peut trouver $a, b \in \mathbb{C}$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \,, \quad u_n = (a + bn) r^n \,.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = r^{-n} u_n \,.$$

On trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = 0 \,,$$

ou encore

$$v_{n+2} - v_{n+1} = v_{n+1} - v_n \,.$$

On en déduit que la suite $(v_{n+1} - v_n)$ est arithmétique.

□

Exemple 4.15. Donner une expression explicite du terme général des suites qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N} \,, \quad u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4 = 0 \,, \tag{4.4}$$

et $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$.

4.2. **Monotonie des suites, majoration, minoration.**

Définition 4.16. Soit u une suite.

- i On dit que u est croissante lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.
- ii On dit que u est décroissante lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- iii On dit que u est monotone si elle est croissante ou décroissante.

On définit de même les notions de strictement croissant, strictement décroissant et strictement monotone.

Exemple 4.17. Montrer que la suite de terme général $u_n = n^2 - n$ est croissante.

Exemple 4.18. Les suites arithmétiques de raisons positives (resp. négatives) sont croissantes (resp. décroissantes).

Exemple 4.19. Montrer qu'une suite géométrique non nulle de raison strictement plus grande que 1 est strictement monotone.

Définition 4.20. Soit u une suite.

i On dit que u est majorée lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.

ii On dit que u est minorée lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.

iii On dit que u est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

Exemple 4.21. Les suites décroissantes sont majorées et les suites croissantes sont minorées.

4.3. **Limite d'une suite.**

4.3.1. *Généralités.*

Définition 4.22. Soit u une suite. On dit qu'un nombre $\ell \in \mathbb{R}$ est limite de la suite u lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 \,, \exists N \in \mathbb{N} \,, \forall n \in \mathbb{N} \,, (n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon) \ .$$

Proposition 4.23. *Si u est une suite convergente et si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$ sont limites de u, alors $\ell_1 = \ell_2$. Cette valeur commune est, par définition, la limite de u et est notée $\lim u$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.*

Exemple 4.24. Les suites constantes sont convergentes.

Exemple 4.25. On considère la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n^2+1}$. Montrer que u tend vers 0 en exhibant un $N \in \mathbb{N}$ explicite (et dépendant de ε).

Exemple 4.26. Monter qu'une suite géométrique de raison r telle que $|r| < 1$ tend vers 0. On pourra utiliser le logarithme.

Exemple 4.27. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$ est convergente.

Exemple 4.28. Montrer que la suite de terme général $u_n = n2^{-n}$ est convergente.

Proposition 4.29. *Toute suite convergente est bornée.*

Proposition 4.30. *Tout suite qui converge vers une limite strictement positive est strictement positive à partir d'un certain rang.*

Proposition 4.31 (Limite d'une suite extraite)**.** *Si u est une suite convergente vers ℓ, alors toute suite extraite de u est convergente vers ℓ. $\star$ Réciproquement, si toutes les suites extraites de u convergent vers ℓ, alors u converge vers ℓ.*

Proposition 4.32. *Si u est une suite telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers une même limite ℓ, alors u converge vers ℓ.*

Définition 4.33. Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Exemple 4.34. Montrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente.

Définition 4.35. Soit u une suite. On dit que u tend vers $+\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R} \,, \exists N \in \mathbb{N} \,, \forall n \in \mathbb{N} \,, (n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A) \ .$$

On vérifie facilement qu'une suite qui tend vers $+\infty$ est divergente et non bornée. On dit dans ce cas que u diverge vers $+\infty$. On définit de même la divergence vers $-\infty$.

Exemple 4.36. On considère la suite de terme général $u_n = n^2 - n$. Montrer que u diverge vers $+\infty$.

Exemple 4.37. Montrer qu'une suite géométrique non nulle de raison $r > 1$ diverge soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$. En déduire (en utilisant l'Exemple 4.27) la limite de $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$.

4.3.2. *Propriétés de la limite.*

Proposition 4.38. *Les assertions suivantes sont vraies.*

i. *Si u et v convergent respectivement vers ℓ_u et ℓ_v, alors u+v converge vers $\ell_u + \ell_v$, uv converge vers $\ell_u \ell_v$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λu converge vers $\lambda \ell_u$.*

ii. *Si u est bornée et si v diverge vers $\pm\infty$, alors $u + v$ diverge vers $\pm\infty$.*

iii. *Si u et v divergent vers $\pm\infty$, $u + v$ diverge vers $\pm\infty$ et uv diverge vers $+\infty$.*

iv. *Si u converge vers $\ell_u > 0$ et si v diverge vers $\pm\infty$, uv diverge vers $\pm\infty$.*

v. *Si u est une suite d'éléments non nuls et convergente de limite $\ell_u \neq 0$, alors la suite $\frac{1}{u}$ converge vers $\frac{1}{\ell_u}$.*

vi. *Si u est une suite d'éléments non nuls divergeant vers $\pm\infty$, la suite $\frac{1}{u}$ converge vers 0.*

Proposition 4.39. *Soient deux suites u, v telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n \, .$$

Si u, v convergent vers ℓ_u, ℓ_v respectivement, on a :

$$\ell_u \leq \ell_v \, .$$

Exemple 4.40. Donner un exemple de suite u telle que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ telle que u converge vers 0. Conclure que **les inégalités strictes ne sont pas préservées par passage à la limite** !

Proposition 4.41 (Théorème des gendarmes)**.** *Soient u et v deux suites convergentes et de même limite ℓ. Si w est une autre suite qui vérifie :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \, , \quad u_n \leq w_n \leq v_n \, ,$$

alors w converge vers ℓ.

4.3.3. *Autour du théorème de convergence monotone.* On peut parfois montrer a priori qu'une suite converge sans connaître la limite.

Proposition 4.42 (Convergence monotone)**.** *Toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge.*

Démonstration. On rappelle le Théorème 1.7. Soit u une suite croissante et majorée. Notons

$$A = \{u_n \, , n \in \mathbb{N}\} \, ,$$

l'ensemble des valeurs prises par la suite. C'est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Elle possède donc une borne supérieure S. En particulier, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \, , u_n \leq S \, ,$$

et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$, $a \geq S - \varepsilon$. Cela signifie qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq S - \varepsilon$. Par croissance de la suite u, on en déduit que, pour tout $n \geq N$,

$$u_n \geq u_N \geq S - \varepsilon \, ,$$

et donc

$$-\varepsilon \leq u_n - S \leq 0 \leq \varepsilon \, .$$

On a montré que u converge vers S. $\square$

De cette proposition, on déduit le fameux théorème des suites adjacentes.

Proposition 4.43 (Suites adjacentes)**.** *Soient u et v deux suites telles que*

i *u est croissante et v est décroissante,* ii $v - u$ *converge vers* 0.

Alors, u *et* v *convergent vers une limite commune.*

Démonstration. Commençons par montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Si ce n'était pas le cas, il existerait $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > v_{n_0}$. Mais alors, par monotonie, on en déduirait, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0} > v_{n_0} \geq v_n$ et par conséquent : $u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_{n_0} > 0$. Comme $u - v$ converge vers 0, on en déduit que $0 \geq u_{n_0} - v_{n_0} > 0$, ce qui est contradictoire.

De cette propriété et de la monotonie, on déduit que u est majorée (par v_0) et que v est minorée (par u_0). Ainsi, u et v sont convergentes de limites respectives ℓ_u et ℓ_v. Comme $u - v$ tend vers 0, on en tire $\ell_u = \ell_v$. □

Corollaire 4.44 ($\star$ Théorème des segments emboîtés)**.** *Soit* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de segments fermés de* $\mathbb{R}$ *dont la longueur tend vers* 0 *et décroissante au sens où* $I_{n+1} \subset I_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Alors* $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *est un ensemble qui contient un point et un seul.*

Théorème 4.45 ($\star$ Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *Soit* u *une suite bornée de réels. Alors* u *possède une suite extraite convergente.*

4.4. Suites définies par itération d'une fonction.

4.4.1. *Quelques propriétés générales.* Dans cette section, on considère une fonction $f : I \to I$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Le fait que f parte de I et arrive dans I est crucial dans cette partie. Nous considérons la suite suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} = f(u_n)\,, \qquad u_0 \in \mathbb{R}\,. \tag{4.5}$$

Proposition 4.46. *Supposons que* f *est croissante. Alors, la suite* u *définie par* (4.5) *est monotone. Si* $u_1 - u_0 \geq 0$*,* u *est croissante et si* $u_1 - u_0 \leq 0$*, elle est décroissante.*

Proposition 4.47. *Supposons que* f *est croissante et que* I *est borné. Alors la suite* u *définie par* (4.5) *est convergente.*

Proposition 4.48. *Supposons que* f *est croissante et que* I *est un segment. Alors la suite* u *définie par* (4.5) *est convergente vers une limite* $\ell \in I$*.*

Proposition 4.49. *Si la suite* u *définie par* (4.5) *est convergente vers une limite* $\ell \in I$ *et que* f *est continue en* ℓ*, alors* $f(\ell) = \ell$*.*

Proposition 4.50. *Supposons que* f *est croissante continue et que* I *est un segment. Alors la suite* u *définie par* (4.5) *est convergente vers une limite* $\ell \in I$ *qui vérifie* $f(\ell) = \ell$*.*

Dans le cas où f est décroissante, il faut être prudent.

Proposition 4.51. *Supposons que* f *est décroissante. Alors les suites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *sont monotones. Si, en outre,* I *est borné, ces deux suites sont convergentes.*

Proposition 4.52. *On suppose qu'il existe* $\alpha \in [0, 1[$ *tel que :*

$$\forall x, y \in I\,, \quad |f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|\,.$$

On suppose aussi qu'il existe $\ell \in I$ *tel que* $f(\ell) = \ell$*. Alors la suite* u *définie par* (4.5) *converge vers* ℓ*. De plus, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad |u_n - \ell| \leq \alpha^n |u_0 - \ell|\,.$$

4.4.2. *Méthode de Newton.*

Proposition 4.53 (⋆⋆ Méthode de Newton)**.** *Soit $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que il existe $c, C > 0$ tels que*

$$\forall x \in [c,d]\,, \quad |g''(x)| \le C\,, \quad g'(x) \ge c\,.$$

On suppose que g s'annule dans $]c,d[$. Ce point est unique et est noté z. On pose, pour tout $x \in [c,d]$,

$$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}\,.$$

Alors, on a, pour tout $x \in [c,d]$,

$$|f(x) - z| \le \frac{C}{2c}|x-z|^2\,.$$

De plus, il existe $\alpha \in]0, \frac{2c}{C}[$ tel que $I = [z-\alpha, z+\alpha]$ vérifie $I \subset [c,d]$ et $f(I) \subset I$.

La suite récurrente définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)}\,, \quad u_0 \in I$$

converge vers z. De plus, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - z| \le \left(\frac{2c}{C}|u_0 - z|\right)^{2^n} \le \left(\frac{2c}{C}\alpha\right)^{2^n}\,.$$

5. Limites des fonctions de la variable réelle

5.1. **Définition de la limite et propriétés.** Soit I une partie de $\mathbb{R}$ non vide.

5.1.1. *Généralités.* Soit a un point adhérent de I. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Définition 5.1 (⋆⋆ Limite)**.** On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est limite de f en a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists \eta > 0\,, \forall x \in \mathbb{R}\,, (x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I \Longrightarrow |f(x) - \ell| \le \varepsilon)\,.$$

Proposition 5.2 (⋆⋆)**.** *Si $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ sont limites de f en a, alors $\ell_1 = \ell_2$. Ce nombre commun, noté $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ est appelé la limite de f en a.*

Exemple 5.3 (⋆⋆)**.** Montrer que $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ admet une limite en tout point de $\mathbb{R}$.

Exemple 5.4 (⋆⋆)**.** On considère la fonction partie entière $\mathbb{R} \ni x \mapsto E(x) \in \mathbb{R}$. L'entier relatif $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x. En quels points la fonction E admet-elle une limite ?

Si f n'admet pas de limite en a, on dit qu'elle est divergente en a.

Exemple 5.5 (⋆⋆)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \ni x \mapsto \frac{1}{x-1}$. Montrer qu'il existe un point en lequel f n'a pas de limite.

Définition 5.6 (⋆⋆ Limites à droite)**.** On suppose que a est un point adhérent à droite de I. On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est limite à droite de f en a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists \eta > 0\,, \forall x \in \mathbb{R}\,, (x \in [a, a+\eta[\cap I \Longrightarrow |f(x) - \ell| \le \varepsilon)\,.$$

Un tel ℓ est unique ; il est appelé la limite à droite de f en a et noté $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \ge a}} f(x)$.

On définit de même la limite à gauche.

Proposition 5.7 ($\star\star$)**.** *Si f a une limite en a, alors elle admet une limite à droite et à gauche en a et*
$$\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\x\le a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\x\ne a}} f(x)\,.$$

Démonstration. C'est une conséquence évidente des définitions. □

Proposition 5.8 ($\star\star$)**.** *Si f a une limite à droite et à gauche en a et que* ***ces limites coïncident****, alors f a une limite en a et*
$$\lim_{\substack{x\to a\\x\ge a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\x\le a}} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)\,.$$

Définition 5.9 ($\star\star$)**.** On dit que f tend vers $+\infty$ en a lorsque :
$$\forall M\in\mathbb{R}\,, \exists\eta>0\,, \forall x\in\mathbb{R}\,, (x\in]a-\eta,a+\eta[\cap I \Longrightarrow f(x)\ge M)\ .$$

On définit de façon analogue la divergence en $-\infty$. On définit également la notion de divergence en $\pm\infty$ à droite et à gauche.

Proposition 5.10 ($\star\star$)**.** *Si f admet une limite strictement positive (resp. négative) en a, alors il existe $\eta>0$ tel que, pour tout $x\in]a-\eta,a+\eta[\cap I$, $f(x)>0$ (resp. $f(x)<0$).*

5.1.2. *Caractérisation séquentielle.* On peut caractériser les limites de fonctions à l'aide de suites. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 5.11 ($\star$)**.** *Soit $f : I\to\mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i. *f admet une limite en a.*
ii. *Il existe $\ell\in\mathbb{R}$ tel que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $u_n\in I$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, avec $\lim u = a$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(u_n)=\ell$.*

Dans ce cas, le ℓ du deuxième point est la limite de f en a.

Démonstration. Supposons que f admet une limite en a et notons la ℓ. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $u_n\in I$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, avec $\lim u=a$. Soit $\varepsilon>0$. Il existe $\eta>0$ tel que, pour tout $x\in I$ tel que $|x-a|<\eta$, $|f(x)-\ell|\le\varepsilon$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\ge N$, $|u_n-a|\le\eta$. Ainsi, pour tout $n\ge N$, $|f(u_n)-\ell|\le\varepsilon$.

Réciproquement, supposons que f n'admette pas ℓ (donné par le deuxième point) comme limite en a. Il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout $\eta>0$, il existe $x\in I\setminus\{a\}$ avec $|x-a|<\eta$ tel que $|f(x)-\ell|\ge\varepsilon$. On choisit $\eta=\frac{1}{n+1}$ avec $n\in\mathbb{N}$ et on considère $x_n\in I$ avec $|x_n-a|<\frac{1}{n+1}$ tel que $|f(x_n)-\ell|\ge\varepsilon$. En passant à la limite, on trouve $0\ge\varepsilon>0$. C'est une contradiction. □

Le lecteur est invité à écrire et démontrer l'énoncé dans le cas où f tend vers $+\infty$ en a.

Exemple 5.12 ($\star\star$)**.** Montrer que la fonction $\mathbb{R}\setminus\{0\}\ni x\mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)\in\mathbb{R}$ n'admet pas de limite en 0.

5.1.3. *Propriétés de la limite.*

Proposition 5.13 ($\star$)**.** *Soient f et g deux fonctions de I vers $\mathbb{R}$. Soit a adhérent à I. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$.*

i. *Si f et g admettent respectivement pour limites ℓ_f et ℓ_g en a, alors $f+g$ admet une limite en a qui vaut $\ell_f+\ell_g$, fg admet une limite en a qui vaut $\ell_f\ell_g$ et λf admet $\lambda\ell_f$ comme limite en a.*
ii. *Si f est bornée et si g tend vers $\pm\infty$, $f+g$ tend vers $\pm\infty$.*
iii. *Si f et g divergent en a vers $\pm\infty$, $f+g$ diverge en a vers $\pm\infty$ et fg diverge en a vers $+\infty$.*
iv. *Si f converge en a vers $\ell_f>0$ et si g diverge en a vers $\pm\infty$, fg diverge vers $\pm\infty$.*

v. *Si f est bornée et si g tend vers 0 en a, alors fg tend vers 0 en a.*

vi. *Si f ne s'annule pas et est convergente en a de limite $\ell_f \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est bien définie près de a et converge vers $\frac{1}{\ell_f}$.*

vii. *Si f ne s'annule pas et diverge en a vers $\pm\infty$, la fonction $\frac{1}{f}$ converge vers 0 en a.*

Exemple 5.14 ($\star$)**.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Proposition 5.15 ($\star\star$)**.** *Soient I, J des parties de $\mathbb{R}$ non vides. Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Soit a point adhérent à I. On suppose que f admet une limite en a. On pose $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ et on suppose que b est un point adhérent à J. Si g admet une limite en b et que f ne prend pas la valeur b au voisinage de a, alors $g \circ f$ admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = \lim\limits_{x \to b} g(x)$.*

Proposition 5.16 ($\star\star$)**.** *Soient deux fonctions f, g définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :*

$$\forall x \in I \quad f(x) \leq g(x)\,.$$

Si f et g convergent en a vers ℓ_f et ℓ_g respectivement, on a :

$$\ell_f \leq \ell_g\,.$$

5.2. $\star\star$ **Quelques limites classiques.**

5.2.1. *Limites des fonctions monotones.* Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Proposition 5.17. *Soit f une fonction monotone sur I. Alors, f admet en tout point intérieur de I des limites à droite et à gauche. Elle admet aussi une limite (éventuellement infinie) à l'extrémité gauche et une limite (éventuellement infinie) à l'extrémité droite.*

Démonstration. Considérons le cas où f est croissante et examinons seulement le cas d'un point intérieur a. Montrons que f admet une limite à gauche en a. On pose :

$$A = \{f(x)\,, \quad x \in I \quad \text{et} \quad x < a\}\,.$$

A est une partie non vide et majorée par $f(a)$ (car f est croissante). Notons S la borne supérieure de A. On a, pour tout $x \in I \cap]-\infty, a[$, $f(x) \leq S$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x_0 \in I \cap]-\infty, a[$ tel que $f(x_0) \geq S - \varepsilon$. Par monotonie, on en déduit que pour tout $x \in]x_0, a[$,

$$S \geq f(x) \geq f(x_0) \geq S - \varepsilon\,.$$

On a donc montré que f admet une imite à gauche en a et elle vaut S.

On montre de la même façon que f admet une limite à droite en considérant une borne inférieure. $\square$

5.2.2. *Quelques exemples.*

Proposition 5.18. *Soit f une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors, si le coefficient dominant de f est positif,*

i. *f tend vers $+\infty$ en $+\infty$,*

ii. *f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ si le degré de f est pair,*

iii. *f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ si le degré de f est impair.*

Proposition 5.19. *Soit f et g des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que g ne s'annule pas et on pose $h = \frac{f}{g}$. On note a_f et a_g les coefficients dominants de f et g. Alors les assertions suivantes sont vraies.*

i. *Si* $\deg(f) < \deg(g)$*, alors* h *tend vers* 0 *en* $\pm\infty$.
ii. *Si* $\deg(f) \geq \deg(g)$ *et* $a_f a_g > 0$*, alors* h *tend vers* $+\infty$ *en* $+\infty$.
iii. *Si* $\deg(f) \geq \deg(g)$*,* $a_f a_g > 0$ *et* $\deg(g) - \deg(f)$ *est pair, alors* h *tend vers* $+\infty$ *en* $-\infty$.
iv. *Si* $\deg(f) \geq \deg(g)$*,* $a_f a_g > 0$ *et* $\deg(g) - \deg(f)$ *est impair, alors* h *tend vers* $-\infty$ *en* $-\infty$.

Proposition 5.20. *On a :* $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

Démonstration. La fonction $\ln$ possède une limite finie ou infinie en $+\infty$ car elle est croissante. Montrons que f n'est majorée. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\ln(2^n) = n\ln(2)$. Comme $2 > 1$, on a $\ln(2) > 0$ et donc f n'est pas majorée. Comme elle est croissante, on en déduit qu'elle tend vers $+\infty$. L'autre limite se déduit aisément. □

6. Continuité

6.1. Définitions et propriétés.

6.1.1. ⋆⋆ *Généralités.* Soit I une partie de $\mathbb{R}$ non vide et $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Définition 6.1. On dit que f est continue en a si f admet une limite en a et que cette limite vaut $f(a)$. Plus précisément, cela signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists \eta > 0\,, \forall x \in \mathbb{R}\,, (x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)\ .$$

Exemple 6.2. Montrer que $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ est continue en 1.

Exemple 6.3. Montrer que si f est continue en a, alors $|f|$ l'est aussi.

Définition 6.4. On dit que f est continue à droite (resp. à gauche) en a si f admet une limite à droite (resp. à gauche) en a. Cette limite vaut $f(a)$.

Proposition 6.5. *f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.*

Exemple 6.6. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$. Montrer que f n'est pas continue en 0. Montrer qu'elle admet une limite à droite et à gauche en 0.

Proposition 6.7. *Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continues en a est une fonction continue est a.*

Définition 6.8. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I. L'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une fonction continue.

Exemple 6.9. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ est continue.

Exemple 6.10. Montrer que les fonctions polynomiales sont continues.

6.1.2. ⋆⋆ *Prolongement par continuité.*

Proposition 6.11. *Soit I une partie de $\mathbb{R}$ non vide et a un point adhérent à I n'appartenant pas à I. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet une limite ℓ en a. On définit $\tilde{f}$ sur $I \cup \{a\}$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in I$ et $\tilde{f}(a) = \ell$. Alors $\tilde{f}$ est continue en a. La fonction $\tilde{f}$ est appelée prolongement par continuité de f en a.*

Exemple 6.12. Soit

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} .$$

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

6.1.3. $\star$ *Caractérisation séquentielle.*

Proposition 6.13. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i. *f est continue en a.*

ii. *Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $u_n \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $\lim u = a$, on a*
$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)\,.$$

6.1.4. $\star\star$ *Opérations sur les fonctions continues.*

Proposition 6.14. *Soient f, g et h trois fonctions de I vers $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont continues en a, alors $f+g$, fg et λg sont continues en a. Si $f(a) \neq 0$, alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$, $f(x) \neq 0$ et la fonction $]a-\eta, a+\eta[\cap I \ni x \mapsto \frac{1}{f(x)} \in \mathbb{R}$ est continue en a.*

Proposition 6.15. *Soient I, J des parties de $\mathbb{R}$ non vides. Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose que f est continue en a. On pose $b = f(a)$ et on suppose que $b \in J$. Si g est continue en b, alors $g \circ f$ est continue en a.*

6.2. Valeurs intermédiaires et théorème du maximum.

6.2.1. *Valeurs intermédiaires.*

Théorème 6.16 ($\star$ Valeurs intermédiaires)**.** *Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Démonstration. Soient $c, d \in f(I)$ avec $c \leq d$. On écrit $c = f(a)$ et $d = f(b)$. Supposons que $a \leq b$. Soit $y \in [c, d]$. Montrons qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $y = f(x_0)$. On pose :
$$A = \{x \in [a,b] : f(x) \leq y\}\,.$$
A est non vide car $a \in A$ et A est majorée. Soit x_0 la borne supérieure de A. On a $x_0 \in [a, b]$. Montrons que $f(x_0) \leq y$. Soit $n \geq 0$. Il existe $a_n \in A$ tel que
$$x_0 - \frac{1}{1+n} \leq a_n \leq x_0\,.$$
On en déduit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0. On a alors $f(a_n) \leq y$ et donc $f(x_0) \leq y$.

Il faut montrer que $f(x_0) \geq y$. Si $x_0 = b$, il n'y a rien à faire. Sinon on a $x_0 < b$ et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $x_0 + \frac{1}{n+1} \in [a, b] \subset I$. On a $f\left(x_0 + \frac{1}{n+1}\right) > y$. En passant à la limite, on en déduit que $f(x_0) \geq y$.

Par conséquent, $f(x_0) = y$.

On traite le cas $b \leq a$ de façon analogue en faisant intervenir une borne inférieure. On en déduit que $f(I)$ est un intervalle.

□

6.2.2. *Théorème du maximum.*

Théorème 6.17 ($\star$ Théorème du maximum)**.** *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $I = [a, b]$. Si f est continue sur I, alors f est bornée et atteint ses bornes. De plus,*
$$f(I) = [\min_{x\in I} f(x), \max_{x\in I} f(x)]\,.$$

Démonstration. En vertu du Théorème 6.16, on a :
$$]\inf_{x\in I} f(x), \sup_{x\in I} f(x)[\subset f(I)\,.$$
Il s'agit juste de montrer que f admet un maximum et un minimum sur I. Montrons par exemple qu'elle a un maximum (pour le minimum on utilise la fonction continue $-f$). Montrons que

$\sup_I f < +\infty$. Si ce n'est pas le cas, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que $(f(x_n))$ tend vers $+\infty$. Par le Corollaire 4.45, il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $x \circ \varphi$ converge vers α. Le lecteur peut facilement vérifier que $f \circ x \circ \varphi$ tend encore $+\infty$. Mais, par continuité de f elle converge aussi vers $f(\alpha)$. C'est contradictoire. On a donc montré que $\sup_I f < +\infty$. On montre que le supremum est atteint par un argument similaire, en considérant une suite d'éléments de I telle que $(f(x_n))$ tend vers $\sup_I f$. $\square$

6.3. Réciproque des fonctions continues et strictement monotones.

6.3.1. *Fonctions continues et strictement monotones.*

Lemme 6.18 (⋆⋆). *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ ouvert. Soit $J \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to J$. Supposons que f est continue et bijective. Alors J est un intervalle ouvert et f est strictement monotone. De plus, f^{-1} est strictement monotone de même monotonie que f.*

Démonstration. Comme f est subjective, on a $f(I) = J$ et J est donc un intervalle. Montrons que f est monotone. Pour cela on raisonne par l'absurde. On suppose que f n'est pas monotone. Il existe, par exemple, $x < y < z$ trois éléments de I tels que $f(x) < f(y)$ et $f(z) < f(y)$. Soit $b \in]f(x), f(y)[$. Par le théorème des valeurs intérmédiaires, il existe $a \in [x, y]$ tel que $b = f(a)$. On a $a \neq x$ et $a \neq y$ d'où $a \in]x, y[$. De même il existe $a' \in]y, z[$ tel que $f(a') = b$. Ainsi, pour $a \neq a'$, $f(a) = f(a')$ et f n'est pas injective. On a donc montré que f est monotone. L'injectivité implique alors la stricte monotonie.

Montrons que J est ouvert. Supposons sans perte de généralité que f est strictement croissante. Supposons que J est majoré et notons b son extrémité supérieure. Si $b \in J$, il existe $a \in I$ tel que $b = f(a)$. I étant un intervalle ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $]a - \eta, a + \eta[\subset I$. Soit $a' \in]a, a + \eta[$. On a $f(a') > f(a) = b$. Cela contredit la définition de b. Ainsi b n'est pas dans I. On raisonne de même avec l'extrémité inférieure. $\square$

Proposition 6.19 (⋆⋆). *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ ouvert. Soit $J \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to J$. Supposons que f est continue et bijective. Alors $f^{-1} : J \to I$ est continue.*

Démonstration. On applique le Lemme 6.18. J est un intervalle ouvert et on peut supposer que f est strictement croissante (et f^{-1} aussi). Soit $b \in J$ et $\varepsilon > 0$. On écrit $b = f(a)$ avec $a \in I$. Il existe $\varepsilon_0 \in]0, \varepsilon[$ tel que $[a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0] \subset I$. On a, par le théorème des valeurs intermédiaires, $[f(a - \varepsilon_0), f(a + \varepsilon_0)] \subset J$. On a aussi $f(a - \varepsilon_0) < b < f(a + \varepsilon_0)$. Alors, pour tout $y \in]f(a - \varepsilon_0), f(a + \varepsilon_0)[$, on a :

$$a - \varepsilon \leq a - \varepsilon_0 \leq f^{-1}(y) \leq a + \varepsilon_0 \leq a + \varepsilon\,.$$

La conclusion s'ensuit aisément. $\square$

Proposition 6.20 (⋆). *Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue et strictement croissante. Alors, on a*

$$f(I) =]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)[$$

et $\tilde{f} : I \to f(I)$ est une bijection.

Démonstration. Traitons le cas où les limites sont finies. Soit $x_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $x_0 < b - \eta$ et pour tout $x \in]b - \eta, b[\cap I$, $f(x) \leq \lim_{x\to b^-} f(x) + \varepsilon$. en particulier, on a $f(x_0) \leq \lim_{x\to b^-} f(x) + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi, $f(x_0) \leq \lim_{x\to b^-} f(x)$. On traite l'autre extrémité de la même façon. On a donc

$$f(I) \subset]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)[\,.$$

Soit $y_0 \in]\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)[$. En utilisant la définition des limites, il existe $x_1, x_2 \in I$ tel que $f(x_1) \le y_0 \le f(x_2)$. On en déduit, par le théorème des valeurs intermédiaires, que $y_0 \in f(I)$. $\square$

6.3.2. *Une application fondamentale : les fonctions puissances.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $p_n :]0, +\infty[\ni x \mapsto x^n \in]0, +\infty[$. On pose, par convention, $x^0 = 1$.

Définition 6.21. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \ge 1$ et $x > 0$, on pose $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. On continue de noter p_n la fonction puissance correspondante.

Proposition 6.22. *Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. On a : $p_{n_1 n_2} = p_{n_1} \circ p_{n_2} = p_{n_2} \circ p_{n_1}$.*

Proposition 6.23. *Soit $n \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq 0$. Alors la fonction $p_n :]0, +\infty[\ni x \mapsto x^n \in]0, +\infty[$ est continue, strictement monotone et bijective. On note, pour $x > 0$, $x^{\frac{1}{n}} := p_n^{-1}(x)$ et on pose $p_{\frac{1}{n}}(x) = x^{\frac{1}{n}}$.*

Proposition 6.24. *Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ non nuls. On a*

$$p_{\frac{1}{n_1 n_2}} = p_{\frac{1}{n_1}} \circ p_{\frac{1}{n_2}} = p_{\frac{1}{n_2}} \circ p_{\frac{1}{n_1}} .$$

Proposition 6.25. *Soit $x > 0$ et $n, p \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq 0$. Alors $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^p = (x^p)^{\frac{1}{n}}$ et, si $\frac{p}{n} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{n}}$ (pour d'autres entiers $\tilde{n}, \tilde{p}$), on a :*

$$\left(x^{\frac{1}{\tilde{n}}}\right)^{\tilde{p}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^p .$$

Cette valeur commune est notée $x^{\frac{p}{n}}$.

Démonstration. Il s'agit de montrer que $(x^p)^{\frac{1}{n}}$ est l'antécédent de x^p par p_n. On calcule donc

$$\left[\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^p\right]^n = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{pn} = \left[\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n\right]^p = x^p .$$

Pour la deuxième partie de l'énoncé, on commence par écrire

$$\left(x^{\frac{1}{\tilde{n}}}\right)^{\tilde{p}} = \left(x^{\tilde{p}}\right)^{\frac{1}{\tilde{n}}} ,$$

puis, de même,

$$\left[\left(x^{\tilde{p}}\right)^{\frac{1}{\tilde{n}}}\right]^n = \left[\left(x^{\tilde{p}}\right)^n\right]^{\frac{1}{\tilde{n}}} = \left[x^{p\tilde{n}}\right]^{\frac{1}{\tilde{n}}} = x^p ,$$

et la conclusion s'ensuit. $\square$

Définition 6.26. Pour $q \in \mathbb{Q}$, on définit

$$p_q :]0, +\infty[\ni x \mapsto x^q \in]0, +\infty[.$$

Proposition 6.27 ($\star$)**.** *Pour $q \in \mathbb{Q}$ et $q > 0$ (resp. $q < 0$), la fonction p_q est strictement croissante (resp. décroissante), continue et bijective.*

7. Dérivabilité

7.1. **Définition et interprétation.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou éventuellement une union d'intervalles). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

7.1.1. *Définition.*

Définition 7.1 ($\star\star$)**.** On dit que f est dérivable en a lorsqu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists \eta > 0\,, \forall x \in \mathbb{R}\,,$$
$$\left(x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I \setminus \{a\} \Longrightarrow \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell \right| \leq \varepsilon \right) .$$

Un tel ℓ est unique et on le note $f'(a)$ et on l'appelle dérivée de f en a.

Exemple 7.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

Exemple 7.3. La fonction $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto x^{-1} \in \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exemple 7.4. La fonction $[0, +\infty[\ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de $]0, +\infty[$, mais pas en 0.

Proposition 7.5. *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Définition 7.6. Si a est intérieur à I et si f est dérivable en a, on appelle tangente au graphe de f en $(a, f(a))$ la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)\,.$$

Si a est l'extrémité gauche (resp. droite) de I, on dit dans ce cas que la demi-droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, $x \geq a$ (resp. $x \leq a$) est la demi-tangente à droite (resp. gauche) au graphe de f en $(a, f(a))$.

On dispose aussi d'une notion de tangente à l'infini, aussi appelée asymptote.

Définition 7.7. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$. On dit que la droite d'équation $y = mx + p$ est une asymptote au graphe de f en $+\infty$ lorsque :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (mx+p)\right) = 0\,.$$

On définit de même les asymptotes en $-\infty$.

Exemple 7.8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$. Montrer que le graphe de f admet des asymptotes en $\pm\infty$.

Définition 7.9 ($\star\star$)**.** On suppose que a n'est pas l'extrémité droite de I. On dit que f est dérivable à droite en a lorsqu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists \eta > 0\,, \forall x \in \mathbb{R} \left(x \in]a, a+\eta[\cap I \Longrightarrow \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell \right| \leq \varepsilon \right) .$$

Un tel ℓ est unique et on le note $f'_d(a)$ et on l'appelle dérivée de f à droite en a. La demi-droite d'équation $y = f(a) + f'_d(a)(x-a)$, $x \geq a$ (resp. $x \leq a$) est, par définition, la demi-tangente à droite au graphe de f en $(a, f(a))$.

On définit la dérivabilité à gauche en a d'une façon analogue.

Définition 7.10. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. L'ensemble des fonctions dérivables sur I est noté $\mathcal{D}(I) \subset \mathcal{C}(I)$. Si $\mathcal{D}'(f)$ est l'ensemble des points de I où est f est dérivable, la fonction $\mathcal{D}'(f) \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$ est appelée fonction dérivée de f.

Définition 7.11. On dit que f est continuement dérivable sur I quand f est dérivable en tout point de I et quand sa dérivée f' est continue sur I. On note $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions continuement dérivables sur I. Plus généralement, on note $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions k-fois dérivables sur I à dérivées continues sur I. On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensenble des fonctions indéfiniment dérivables sur I.

7.1.2. *Propriétés.*

Proposition 7.12 ($\star\star$). *Les assertions suivantes sont vraies.*

i. *Si f est dérivable en a, alors f est dérivable à droite et à gauche en a*
ii. *Si f est dérivable à droite et à gauche en a et que $f'_d(a) = f'_g(a)$, alors f est dérivable en a.*

Dans ce cas, on a $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Proposition 7.13 ($\star$). *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables en a, alors $f+g$, fg et λf sont dérivables en a, de dérivée respectives $f'(a)+g'(a)$, $f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ et $\lambda f'(a)$.*

Proposition 7.14 ($\star$). *Soient I et J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en a et que g est dérivable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On pose $b = f(a)$. Il existe $\eta \in]0, \varepsilon[$ tel que, pour tout $y \in]b-\eta, b+\eta[\cap J$, $y \neq b$, on a

$$\left| \frac{g(y)-g(b)}{y-b} - g'(b) \right| \leq \varepsilon \,,$$

ou encore, pour tout $y \in]b-\eta, b+\eta[\cap J$,

$$|g(y)-g(b)-g'(b)(y-b)| \leq \varepsilon |y-b| \,,$$

On a aussi l'existence de $\eta' \in]0, \varepsilon[$ tel que $|\eta' f'(a)| < \frac{\eta}{2}$ et pour tout $x \in]a-\eta', a+\eta'[$ et $x \neq a$

$$\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| \leq \frac{\eta}{2} \,.$$

En particulier, on a :

$$|f(x)-f(a)| \leq \frac{\eta}{2}|x-a| + |f'(a)||x-a| < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta \,.$$

On en déduit que :

$$|g(f(x)) - g(f(a)) - g'(f(a))(f(x)-f(a))| \leq \varepsilon |f(x)-f(a)| \,,$$

On en tire :

$$|g(f(x)) - g(f(a)) - g'(f(a))(f(x)-f(a))| \leq \varepsilon (|f'(a)||x-a| + \frac{1}{2}|x-a|) \,.$$

De plus, on a

$$|g'(f(a))(f(x)-f(a)) - g'(f(a))f'(a)(x-a)| \leq |g'(f(a))||x-a|\frac{\eta}{2} \,.$$

On en déduit, par l'inégalité triangulaire, que :

$$|g(f(x)) - g(f(a)) - g'(f(a))f'(a)(x-a)| \leq \varepsilon |x-a| \left(|f'(a)| + \frac{1}{2} + |g'(f(a))| \right) \,,$$

et la conclusion s'ensuit par des manipulations élémentaires. □

En combinant la dérivée de la fonction inverse et la proposition précédente, on obtient la proposition suivante.

Proposition 7.15 ($\star$)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a et telle que $f(a) \neq 0$. Soit $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$, $f(x) \neq 0$. On pose*

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I\,, \quad g(x) = \frac{1}{f(x)}\,.$$

Alors, g est dérivable en a et $g'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$.

En utilisant la dérivée du produit et de l'inverse, on en déduit la dérivée d'un quotient.

Proposition 7.16 ($\star$)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a et telle que $f(a) \neq 0$. Soit $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$, $f(x) \neq 0$. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Alors, $\frac{g}{f}$ est dérivable en a, de dérivée*

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(a) = \frac{g'(a)f(a) - f(a)g'(a)}{f(a)^2}\,.$$

Proposition 7.17 ($\star$)**.** *Soit I un intervalle non vide et a un* ***point intérieur*** *à I. On suppose que a est un maximum (resp. minimum) local de f, c'est à dire que :*

$$\exists \eta > 0\,, \forall x \in]a-\eta, a+\eta[\,, f(x) \leq f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(a))\,,$$

et que f est dérivable en a. Alors, on a $f'(a) = 0$.

Démonstration. Pour $x > a$ et $x \in I$, on a :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0\,.$$

En passant à la limite (à droite), il vient $f'(a) \leq 0$. Par ailleurs, pour $x < a$ et $x \in I$, on a :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0\,,$$

et donc, par passage à la limite (à gauche), $f'(a) \geq 0$. □

Une application immédiate de la notion de dérivabilité est le calcul de limites. En voici un exemple.

Proposition 7.18 ($\star\star$ Règle de l'Hôpital)**.** *Soient f et g deux fonctions sur $[a, b]$ dérivables en $c \in [a, b]$ telles que $g'(c) \neq 0$. Alors,*

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

7.2. Dérivées de quelques fonctions usuelles.

Proposition 7.19. *La fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Si f est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle ouvert I non vide, alors $\ln f$ est dérivable sur I et de dérivée $\frac{f'}{f}$.*

Exemple 7.20. Donner un domaine de définition pour la fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ et étudier sa dérivabilité.

Proposition 7.21 ($\star$)**.** *La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.*

Démonstration. Nous allons le montrer en admettant que $\exp$ est dérivable en 0 de dérivée 1 et en admettant que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp$ satisfait $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On écrit, pour $x \neq a$,

$$\frac{\exp x - \exp a}{x-a} - \exp a = \exp a \frac{\exp(x-a)-1}{x-a}\,.$$

Le membre de droite tend vers 0 quand x tend vers a. Ainsi, par définition, $\exp$ est dérivable en a et $\exp'(a) = \exp(a)$. □

7.3. **Accroissements finis et applications.**

7.3.1. *Théorème de Rolle.*

Théorème 7.22 (⋆⋆ Théorème de Rolle). *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Par le théorème du maximum, f admet un maximum et un minimum. Si ces extrema sont tous les deux atteints en a et b, alors f est constante et la conclusion s'ensuit. Sinon, soit c un extremum atteint dans $]a,b[$. On a, par la Proposition 7.17,$f'(c) = 0$. □

7.3.2. *Théorème des accroissements finis.*

Théorème 7.23 (⋆⋆ Théorème des accroissements finis). *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Démonstration. On applique le théorème de Rolle à la fonction définie par :

$$\forall x \in [a,b]\,, \quad g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,.$$

□

7.3.3. *Applications : monotonie, prolongement dérivable.*

Définition 7.24 (⋆⋆). Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$. Soit $K \geq 0$. On dit que f est K-lipschitzienne lorsque

$$\forall x, y \in A\,, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|\,.$$

Exemple 7.25 (⋆⋆). Montrer que $\mathbb{R} \ni x \mapsto a|x| + b \in \mathbb{R}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exemple 7.26 (⋆⋆). Montrer que $[0, +\infty[\ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ n'est pas lipschitzienne.

Proposition 7.27 (⋆⋆). *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction K-lipschitzienne. Alors f est continue sur A.*

Proposition 7.28 (⋆⋆). *Soit I un intervalle non vide, non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. On suppose qu'il existe $K \geq 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq K$. Alors f est K-lipschitzienne.*

Exemple 7.29 (⋆⋆). Montrer que $[1, +\infty[\ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ est lipschitzienne.

Corollaire 7.30 (⋆). *Soit I un intervalle non vide, non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et de dérivée nulle. Alors f est constante.*

Proposition 7.31 (⋆). *Soit I un intervalle non vide, non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I croissante (resp. décroissante). Alors la dérivée de f est positive (resp. négative) sur I.*

Proposition 7.32 ($\star$)**.** *Soit I un intervalle non vide, non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et de dérivée positive (resp. strictement positive). Alors f est croissante (resp. strictement croissante).*

Exemple 7.33. Donner un exemple de fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée s'annule en au moins un point.

Exemple 7.34. Montrer que $]0,\pi] \ni x \mapsto \frac{\sin x}{x} \in \mathbb{R}$ est décroissante sur $]0,\pi]$.

Exemple 7.35. Montrer que $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\ni x \mapsto \tan x \in \mathbb{R}$ est dérivable. En déduire que, pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x \geq x$.

Exemple 7.36. Montrer que, pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\,.$$

Proposition 7.37 ($\star\star$ Prolongement dérivable)**.** *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a,b[$. On suppose que f admet une limite ℓ en b et que la f' possède également une limite ℓ' en b. Alors le prolongement par continuité $\tilde{f}$ (au sens de la Proposition 6.11) de f en b est une fonction dérivable en b et $\tilde{f}'(b) = \ell'$.*

Démonstration. Notons $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f en b. Montrons que $\tilde{f}$ est dérivable en b. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $b - \eta > a$ et pour tout $x \in]b-\eta, b[$, $|f'(x) - \ell'| \leq \varepsilon$. Soit $x \in]b-\eta,b[$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(b)}{x-b} = \tilde{f}'(c_x) = f'(c_x)\,.$$

On a alors $|f'(c_x) - \ell'| \leq \varepsilon$ et la conclusion s'ensuit aisément. □

Exemple 7.38 ($\star\star$)**.** Montrer que la fonction de l'Exemple 6.12 est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée en tout point. On pourra utiliser l'Exercice 7.36 pour appliquer le théorème du prolongement dérivable en 0.

Proposition 7.39 ($\star\star$ Théorème de Darboux)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors $f' :]a,b[\to \mathbb{R}$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est à dire : si $c_1, c_2 \in f'(]a,b[)$, alors $[c_1,c_2] \subset f'(]a,b[)$.*

7.4. **Dérivabilité des fonctions réciproques.**

Proposition 7.40 ($\star$)**.** *Soit $I =]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Soit $f : I \to J$, dérivable sur I et telle que $f' > 0$ sur I. Alors $J = f(I)$ est un intervalle ouvert, f est strictement monotone et $f^{-1} : J \to I$ est dérivable sur J et, pour tout $y \in J$, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.*

Démonstration. La fonction f est strictement croissante. On rappelle la Proposition 6.19 relative à la continuité de la réciproque. Soit $b \in J$. Il existe un unique $a \in I$ tel que $b = f(a)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta \in (0, f'(a))$ tel que, pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[(\subset I)$,

$$|f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)| \leq \varepsilon|x-a|\,.$$

On sait que f^{-1} est continue en b. Il existe donc $\eta' > 0$ tel que, pour tout $y \in]b-\eta', b+\eta'[(\subset J)$,

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \eta\,,$$

si bien que :

$$|y - b - (f^{-1}(y) - f^{-1}(b))f'(a)| \leq \varepsilon|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| \leq \varepsilon\eta \leq \varepsilon f'(a)\,.$$

Il reste à diviser par $f'(a)$ et la conclusion s'ensuit. □

7.5. **Études de quelques fonctions usuelles.** Les exemples qui suivent pourront être traités en exercices.

7.5.1. *Les fonctions du second degré.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction du second degré définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad f(x) = ax^2 + bx + c\,,$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$. Supposons que $a > 0$.

Proposition 7.41. *f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (et donc continue sur $\mathbb{R}$), strictement décroissante sur $]-\infty, \frac{b}{2a}[$ et strictement croissante sur $[-\frac{b}{2a}, +\infty[$. Son unique minimum est atteint en $-\frac{b}{2a}$ et il vaut $c - \frac{b^2}{4a^2}$.*

7.5.2. *Les fonctions logarithme et exponentielle.* On rappelle que le logarithme népérien est défini par :

$$\forall x > 0 \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{u} \mathrm{d}u\,.$$

Nous montrerons plus tard que, comme $]0, +\infty[\ni u \mapsto \frac{1}{u} \in \mathbb{R}$ est continue, $\ln$ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et de dérivée $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, pour tout $x > 0$. La fonction $\ln$ est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Elle est aussi continue car dérivable. On observe que $\ln(1) = 0$.

Proposition 7.42. *Pour tout $x, y > 0$, on a : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.*

Démonstration. Soit $y > 0$ et, pour $x > 0$, $f_y(x) = \ln(xy)$. Par composition, f_y est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f_y'(x) = \frac{1}{x} = \ln'(x)$. Il : s'ensuite que $f_y - \ln$ est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Pour tout $y > 0$, il existe donc $c_y \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + c_y$. La fonction $c(\cdot) = \ln(x\cdot) - \ln(\cdot)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée $c'(y) = \frac{1}{y}$ si bien qu'il existe une constante a telle que, pour tout $y > 0$, $c(y) = \ln(y) + a$. On a $a = c(1) = 0$. $\square$

La fonction $\ln\ :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, étant continue et strictement croissante (de limite $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$, par la Proposition 5.20), elle est une bijection. Sa bijection réciproque est $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$. Elle est dérivable par la Proposition 7.40 et sa dérivée vaut, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\exp'(y) = \frac{1}{\ln'(\exp(y))} = \exp(y)$. La fonction $\exp$ est strictement croissante et $\lim_{x\to-\infty} \exp = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

Proposition 7.43. *On a, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la Proposition 7.42. $\square$

Proposition 7.44. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = 1$ et satisfait, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x)f(y)$, alors $f = \exp$.*

Démonstration. Il est facile de voir que $f(0)^2 = f(0)$ et que si $f(0) = 0$, alors f est identiquement nulle. On a donc $f(0) = 1$. Par la preuve de la Proposition 7.21, on obtient que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f' = f$. Si on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)\exp(-x)$, on en déduit facilement que $g'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. g est donc constante égale à $g(0) = 1$. $\square$

Lemme 7.45. *On a $\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$.*

Démonstration. On définit, pour $x > 0$, $f(x) = x \ln x$. On a, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \ln x + 1$. Sur $]-\infty, e[$, la dérivée est strictement négative et donc f y est strictement décroissante ; f possède donc une limite finie ou $-\infty$ en 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 2^{-n}$ (u tend vers 0 par valeurs supérieures). Par la caractérisation séquentielle de la limite, on sait que $(f(u_n))$ tend vers la limite de f en 0. Or, on a, $f(u_n) = -n2^{-n} \ln 2$. Il est aisé (voir l'Exemple 4.28) de montrer que cette suite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. $\square$

Définition 7.46. Pour $a, x > 0$, on pose : $x^a = \exp(a \ln(x))$.

Proposition 7.47. *On a, pour tout* $a > 0$ *:* $\lim_{x\to+\infty} x^a e^{-x} = 0$.

Démonstration. Par définition, on a

$$x^a e^{-x} = e^{-x+a\ln x} = e^{x(-1-ax^{-1}\ln x^{-1})} .$$

On conclut grâce au Lemme 7.45 et une composition de limites. □

Proposition 7.48. *Soit* $a > 0$ *et* $f :]0, +\infty[\ni x \mapsto x^a \in]0, +\infty[$. f *est strictement croissante et dérivable de dérivée* $f'(x) = ax^{a-1}$.

Démonstration. C'est une conséquence de la Proposition 7.14. □

Proposition 7.49. *On a, pour tout* $\alpha > 0$ *:* $\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = 0$.

7.5.3. *Les fonctions sinus et cosinus hyperboliques.* On définit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} , \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} .$$

La proposition suivante se déduit aisément des propriétés de l'exponentielle.

Proposition 7.50. *La fonction* $\cosh$ *est paire et la fonction* $\sinh$ *est impaire. Elles sont toutes deux dérivables sur* $\mathbb{R}$ *de dérivées* $\cosh' = \sinh$ *et* $\sinh' = \cosh$. *La fonction* $\sinh$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et la fonction* $\cosh$ *est strictement croissante sur* $]0, +\infty[$. *On a*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \cosh(x) = +\infty , \quad \lim_{x\to\pm\infty} \sinh(x) = \pm\infty .$$

Définition 7.51. On définit $\mathrm{argcosh}$ comme la fonction réciproque de $\cosh : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ et $\mathrm{argsinh}$ la bijection récriproque de $\sinh$.

Proposition 7.52. *On a :*

$$\forall x \geq 1 , \mathrm{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) ,$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R} , \mathrm{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) .$$

De plus, pour $x > 1$, $\mathrm{argcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ *et pour* $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{argsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Démonstration. Examinons le cas de $\mathrm{argsinh}$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Cherchons $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = \sinh(x)$. On sait déjà qu'un tel x est unique. On a donc :

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} .$$

Cela est équivalent à :

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 .$$

On pose $X = e^x$ et on veut résoudre :

$$X^2 - 2yX - 1 = 0 .$$

Le discriminant est $\Delta = 4(y^2 + 1) > 0$. La seule racine positive est :

$$X_1 = y + \sqrt{1 + y^2} .$$

La conclusion s'ensuit de manière élémentaire. On traite de même $\mathrm{argcosh}$. □

7.5.4. *Les fonctions sinus et cosinus.* On a déjà vu que les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont définies sur $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, de période 2π et que $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$. On rappelle aussi l'Exemple A.13.

Proposition 7.53. *La fonction* $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ *est une bijection strictement croissante. Sa bijection réciproque est notée* $\arcsin$ *et elle est dérivable sur* $]-1,1[$ *de dérivée :*

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. On sait déjà que la fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\sin' = \cos$. Il s'agit de montrer que $\cos$ ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; cela peut être montré en considérant l'Exemple A.13. Par continuité et du fait que $\cos(0) > 0$, on en déduit que $\cos > 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Le reste de la preuve est une conséquence de la Proposition 7.40. □

La proposition suivante s'établit d'une façon analogue.

Proposition 7.54. *La fonction* $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ *est une bijection strictement décroissante. Sa bijection réciproque est notée* $\arccos$ *et elle est dérivable sur* $]-1,1[$ *de dérivée :*

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

7.5.5. *La fonction tangente.*

Proposition 7.55. *La fonction* $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ *est une bijection strictement croissante et dérivable, dont la dérivée vaut* $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ *pour tout* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. *Sa bijection réciproque est notée* $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, *elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Démonstration. Il s'agit de dériver un quotient et de dériver une bijection réciproque. □

8. Intégration

Soit $I = [a,b]$ avec $a < b$.

8.1. ⋆⋆ Intégrale des fonctions en escalier.

Définition 8.1. On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est en escalier s'il existe une subdivision de $[a,b]$, $s_0 = a < s_1 < \ldots < s_n = b$ telle que, pour tout $i \in \{0,\ldots,n-1\}$, f est constante sur $]s_i, s_{i+1}[$. On dit dans ce cas que s est une subdivision adaptée à f.

On observera qu'une telle subdivision n'est pas unique.

Exemple 8.2. Toute fonction constante est en escalier.

Définition 8.3. Si $s = (s_j)_{j=0,\ldots,n}$ est une subdivision de $[a,b]$ et $c \in [a,b]$, on note $s \cup \{c\}$ la subdivision s si $c = s_k$ pour un certain k. Sinon, on note k l'unique entier tel que $c \in]s_k, s_{k+1}[$ et $s \cup \{c\}$ désigne la subdivision s' définie par $s'_j = s_j$ pour $j \leq k$ $s'_{k+1} = c$ et $s'_j = s_{j+1}$ pour $j \geq k+1$. On définit alors par récurrence la réunion de deux subdivisions $s \cup s'$ et on a $s' \cup s = s \cup s'$.

Proposition 8.4. *La réunion d'une subdivision adaptée à une fonction en escalier f avec une subdivision quelconque est encore adpatée à f.*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence. Il suffit de voir que l'ajout d'un point à une subdivision adaptée en fait une subdivision adpatée. □

Proposition 8.5. *Soient* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *en escalier et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors* $f + \lambda g$ *est en escalier.*

Définition 8.6. Soit une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en escalier et s une subdivision adaptée à f. On pose :

$$I(f, s) = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i) f\left(\frac{s_i + s_{i+1}}{2}\right) .$$

Proposition 8.7. *Soit une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en escalier. Si s et s' sont deux subdivisions adaptées à f, on a $I(f, s) = I(f, s')$. Cette valeur commune est appelée intégrale de f sur $[a, b]$ et est notée $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ou encore $\int_a^b f$.*

Démonstration. On note $s'' = s \cup s'$. C'est encore une subdivision adaptée. Montrons que, pour $c \in [a, b]$, $I(f, s) = I(f, s \cup \{c\})$. Il s'ensuivra alors par récurrence que $I(f, s) = I(f, s'')$ et, comme $s'' = s' \cup s$, on aussi $I(f, s') = I(f, s'')$.

□

Exemple 8.8. Si f est constante égale à c, alors $\int_a^b f = c(b - a)$.

Proposition 8.9. *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ en escalier et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$. Si $f \leq g$, on a $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

Démonstration. Il suffit de considérer une subdivision adpatée simultanément à f et g, en prenant la réunion d'une subdivision adaptée à f et d'une subdivision adaptée à g. □

Proposition 8.10. *Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en escalier et $c \in [a, b]$. On a : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.*

8.2. **Intégrale des fonctions continues.** Nous savons maintenant calculer l'intégrale des fonctions en escaliers. Expliquons comment en déduire une définition de l'intégrale d'une fonction continue.

8.2.1. ⋆⋆ *Définition de l'intégrale.* Les fonctions continues sont approchables uniformément par les fonctions en escalier.

Proposition 8.11 (admis)**.** *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier sur $[a, b]$, notées E_1 et E_2, telle que*

$$\forall x \in [a, b] , E_1(x) \leq f(x) \leq E_1(x) + \varepsilon ,$$

et

$$\forall x \in [a, b] , E_2(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq E_2(x) .$$

Définition 8.12. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On pose

$$I_+(f) = \sup_{\substack{E \text{ escalier} \\ E \leq f}} \int_a^b E , \qquad I_-(f) = \inf_{\substack{E \text{ escalier} \\ E \geq f}} \int_a^b E .$$

Ces quantités sont finies en vertu du fait que f est bornée et atteint ses bornes sur $[a, b]$. On a :

$$I_+(f) \leq (b - a) \max_{x \in [a,b]} f(x) , \quad I_-(f) \geq (b - a) \min_{x \in [a,b]} f(x) .$$

Proposition 8.13. *Si f est en escalier, on a $I_+(f) = I_-(f) = \int_a^b f$.*

Proposition 8.14. *Soit f, g continues sur $[a, b]$. Si $f \leq g$, $I_+(f) \leq I_+(g)$.*

Proposition 8.15 (admis)**.** *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On a $I_+(f) = I_-(f)$. Cette valeur commune est appelée intégrale de f sur $[a, b]$ et est encore notée $\int_a^b f$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et considérons les fonctions E_1 et E_2 définies en Proposition 8.11. On obtient facilement que, pour tout $x \in [a, b]$,

$$|E_1(x) - E_2(x)| \leq 2\varepsilon \, .$$

Ensuite, on a : $I_-(f) \leq \int_a^b E_2$ et $I_+(f) \geq \int_a^b E_1$. On en tire alors que

$$I_+(f) \geq \int_a^b E_2 - 2\varepsilon(b-a) \geq I_-(f) - 2\varepsilon(b-a) \, .$$

Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $I_+(f) \geq I_-(f)$.

Par ailleurs, on a $I_-(f) \geq \int_a^b E_1$ et $I_+(f) \leq \int_a^b E_2$. On déduit de même que $I_+(f) \leq I_-(f)$. □

8.2.2. *Propriétés.*

Proposition 8.16 ($\star$). *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :*

$$\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g \, .$$

Proposition 8.17 ($\star$). *Soit f, g continues sur $[a, b]$ telles que $f \leq g$. Alors on a*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g \, .$$

Proposition 8.18 ($\star$). *Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $c \in [a, b]$. On a :*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \, .$$

Proposition 8.19 ($\star$). *Soit f continue sur $[a, b]$. On a* $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

Démonstration. Cela provient du fait que $-|f| \leq f \leq |f|$. □

Proposition 8.20 ($\star$). *Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et d'intégrale nulle, alors f est nulle.*

Démonstration. Soit $c \in [a, b]$. Supposons que $f(c) > 0$. Comme f est continue en c, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [a - \eta, a + \eta] \cap [a, b]$, $f(x) > 0$. Or, on a :

$$\int_a^b f \geq \int_{\max(a, a-\eta)}^{\min(a+\eta, b)} f \geq \min_{x \in [\max(a, a-\eta), \min(a+\eta, b)]} f(x) \, .$$

f est continue sur le segment $[\max(a, a - \eta), \min(a + \eta, b)]$; elle y atteint donc son minimum qui est donc strictement positif. □

Définition 8.21. Si $b \leq a$ et f continue sur $[b, a]$ on pose $\int_a^b f = - \int_b^a f$. On vérifie aisément que les propriétés de linéarité, de Chasles sont toujours valables.

8.3. **Primitives.**

8.3.1. *Généralités.*

Proposition 8.22 ($\star$). *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Pour $x \in [a,b]$, on pose :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\,.$$

Alors F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. En d'autres termes, F est une primitive de f.

Démonstration. Soit $x_0 \in]a,b[$ et $\varepsilon > 0$. f est continue en x_0. Il existe donc $\eta > 0$ tel que $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset [a,b]$ et, pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. On a, par la relation de Chasles,

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)]\mathrm{d}t\,.$$

On applique la Proposition 8.19 à l'intégrale du membre de droite et la conclusion s'ensuit. On traite de même $x_0 = a, b$. $\square$

Corollaire 8.23 ($\star$). *Soit f une fonction dérivable sur $]a,b[$ et de dérivée continue. Alors, pour tout $x, y \in]a,b[$,*

$$\int_x^y f' = f(y) - f(x)\,.$$

8.3.2. *Un exemple fondamental : le logarithme népérien.* Un exemple très classique est la définition du logarithme népérien comme primitive s'annulant en 1 de la fonction inverse :

$$\forall x > 0\,, \quad \ln x := \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t\,.$$

On a montré que $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

8.4. **Calcul d'intégrales.**

8.4.1. *Intégration par parties.*

Proposition 8.24. *Soient f et g deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors, on a :*

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'\,.$$

Démonstration. On observe que $(fg)' = f'g + fg'$. On intègre ensuite sur $[a,b]$ et on applique le Corollaire 8.23. $\square$

Exemple 8.25. Trouver une primitive de $f :]0, +\infty[\ni x \mapsto \ln x \in \mathbb{R}$.

8.4.2. *Changement de variable.*

Proposition 8.26. *Soient $a < b$ et $c < d$. Soit f continue sur $[a,b]$ et soit $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[c,d]$ telle que $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$. Alors, on a :*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_c^d f(\varphi(y))\varphi'(y)\mathrm{d}y\,.$$

Exemple 8.27. Calculer l'intégrale $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}x$. On pourra utiliser le changement de variables $x = \cos u$.

8.4.3. ⋆⋆ *Pour aller plus loin : la formule de Taylor et une application.*

Proposition 8.28 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$. Alors, on a, pour tout $k \in \{0,\cdots,n\}$:*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{k!}\int_a^b f^{(k+1)}(t)(b-t)^k \mathrm{d}t\,.$$

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur k. Pour $k = 0$, cette formule est claire car :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t\,.$$

Supposons que la formule est satisfaite au rang $0 \leq k < n$. On peut donc écrire :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{k!}\int_a^b f^{(k+1)}(t)(b-t)^k \mathrm{d}t\,.$$

Comme $k+1 < n+1$, on $f^{(k+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on peut ainsi faire une intégration par parties :

$$\int_a^b f^{(k+1)}(t)(b-t)^k \mathrm{d}t = -\left[\frac{(b-t)^{k+1}}{k+1} f^{(k+1)}(t)\right]_a^b + \frac{1}{k+1}\int_a^b f^{(k+2)}(t)(b-t)^{k+1}\mathrm{d}t\,.$$

Cela implique :

$$\int_a^b f^{(k+1)}(t)(b-t)^k \mathrm{d}t = \frac{1}{k+1} f^{(k+1)}(a) + \frac{1}{k+1}\int_a^b f^{(k+2)}(t)(b-t)^{k+1}\mathrm{d}t\,.$$

Il suffit alors de remplacer dans la formule supposée vraie par récurrence. □

Exemple 8.29. Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la suite $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. En appliquant la formule de Taylor à l'exponentielle, montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

8.5. ⋆⋆ **Calcul intégral approché.** Soit f une fonction suffisamment régulière sur $[\alpha,\beta]$. On va donner quelques méthodes d'approximation de $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Le cas échéant on donnera une estimation de l'erreur.

De façon générale, on se donne une subdivision de $[\alpha,\beta]$:

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = \beta\,.$$

On note, pour $i = 0,\cdots,k-1$.

$$h_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i\,.$$

On notera $h_{max} = \max(h_i)$.

8.5.1. *Méthode des rectangles à gauche.* Le principe est d'approcher l'intégrale par :

$$\sum_{i=0}^{k-1} h_i f(\alpha_i)\,.$$

Estimons l'erreur. On remarquera que cette méthode est exacte pour les fonctions constantes.

Proposition 8.30. *On suppose que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. On a :*

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_{i=0}^{k-1} h_i f(\alpha_i)\right| \leq \frac{M}{2}(\beta-\alpha)h_{max}\,,$$

où $M = \max_{[a,b]}|f'|$.

Démonstration. On a :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_{i=0}^{k-1} h_i f(\alpha_i) = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (f(x) - f(\alpha_i))\mathrm{d}x\,.$$

Nous pouvons utiliser l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(x) - f(\alpha_i| \leq M|\alpha_i - x|\,.$$

Il vient :

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_{i=0}^{k-1} h_i f(\alpha_i)\right| \leq M\sum_{i=0}^{k-1}\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (x - \alpha_i)\mathrm{d}x\,.$$

Ainsi, nous avons :

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_{i=0}^{k-1} h_i f(\alpha_i)\right| \leq \frac{M}{2}\sum_{i=0}^{k-1}(\alpha_{i+1} - \alpha_i)^2 = \frac{M}{2}(\beta - \alpha)h_{max}\,.$$

□

8.5.2. *Méthode des rectangles à droite.* Le principe est d'approcher l'intégrale par :

$$\sum_{i=0}^{k-1} h_i f(\alpha_{i+1})\,.$$

Exemple 8.31. Calculer l'erreur de la méthode.

8.5.3. *Méthode du point milieu.* Le principe est d'approcher l'intégrale par :

$$\sum_{i=0}^{k-1} h_i f\left(\frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}\right)\,.$$

Estimons l'erreur. On remarquera que cette méthode est exacte pour les fonctions affines.

Proposition 8.32. *On suppose que f est $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. On a*

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_{i=0}^{k-1} h_i f(c_i)\right| \leq \frac{M_2}{4}(\beta - \alpha)h^2\,,$$

où $M_2 = \frac{1}{2}\max_{[a,b]}|f''|$.

Démonstration. On a

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx - \sum_{i=0}^{k-1} h_i f(c_i) = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (f(x) - f(c_i))\mathrm{d}x\,.$$

Nous utilisons la formule de Taylor à l'ordre 1, au point c_i :

$$|f(x) - f(c_i) - f'(c_i)(x - c_i)| \leq M_2|x - c_i|^2\,.$$

Ainsi, nous écrivons :

$$\left|\sum_{i=0}^{k-1}\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (f(x) - f(c_i) - f'(c_i)(x - c_i))\mathrm{d}x\right|$$

$$\leq M_2\sum_{i=0}^{k-1}\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} |x - c_i|^2 dx \leq \frac{M_2}{4}(\beta - \alpha)h^2\,.$$

Nous remarquons :

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} (x - c_i)dx = 0\,.$$

□

8.5.4. *Méthode de Simpson.* Le principe est déja d'approcher f par des arcs de paraboles. On approche alors l'intégrale par :

$$\sum_{i=0}^{k-1} h_i \left(\frac{1}{6} f(\alpha_i) + \frac{4}{6} f(c_i) + \frac{1}{6} f(\alpha_{i+1}) \right)\,.$$

Exemple 8.33. Calculer l'erreur de la méthode.

9. ⋆⋆ Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

9.1. **Définitions.**

Définition 9.1 (Forme générale de l'équation)**.** On appelle équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 1 toute équation différentielle de la forme :

$$A(x)y' + B(x)y = C(x)\,, \tag{9.1}$$

où A, B, C sont trois fonctions continues de $J \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, J étant un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.
L'équation homogène associée à (9.1) est :

$$A(x)y' + B(x)y = 0\,. \tag{9.2}$$

Définition 9.2 (Forme résolue)**.** Si A ne s'annule pas en un point $x_0 \in J$, alors il existe un intervalle $I \subset J$ tel que $A(x) \neq 0$ pour $x \in I$ et alors (9.1) se met sous la forme dite "résolue" sur I :

$$y' = -\frac{B(x)}{A(x)} y + \frac{C(x)}{A(x)} = b(x)y + c(x)\,.$$

Définition 9.3. Soit $J_1 \subset J$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. On dit que f est une J_1-solution de (9.1) si, pour tout $x \in J_1$, on a :

$$A(x)f'(x) + B(x)f(x) = C(x)\,.$$

Nous nous intéresserons donc aux couples (J_1, f) qui résolvent l'équation (9.1). Si (J_1, f) est une solution de (9.1) et si $J_2 \subset J_1$, alors (J_2, f) est une J_2 solution de (9.1).

Définition 9.4 (Solution maximale)**.** On dit que (J_1, f) est une solution maximale de (9.1) si et seulement si elle n'est la restriction à J_1 d'aucune autre solution qu'elle-même.

Dans la suite, nous allons porter essentiellement notre attention les solutions de l'équation mise sous forme résolue.

9.2. **Résolution théorique.**

Le cas scalaire linéaire a le bon goût d'être particulièrement simple à résoudre. Nous considérons donc l'équation :

$$y' = b(x)y + c(x), \quad x \in I\,, \tag{9.3}$$

où b et c sont des fonctions continues sur I. Nous rappelons l'équation homogène :

$$y' = b(x)y, \quad x \in I\,. \tag{9.4}$$

9.2.1. *Propriétés élémentaires.* Nous disposons des théorèmes élémentaires suivants :

Théorème 9.5. *L'ensemble des I_1-solutions de (9.4) est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.*

Théorème 9.6. *L'ensemble des I_1-solutions de (9.3) est un $\mathbb{R}$ espace affine de direction l'ensemble des I_1-solutions de (9.4).*

9.2.2. *Résolution.*

Théorème 9.7 (Équation homogène)**.** *Soit I_1 un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Les I_1-solutions de l'équation homogène (H) forment un $\mathbb{R}$ e. v. de dimension 1. De plus, les solutions maximales sont définies sur I et si une solution de (H) s'annule en un point, elle est identiquement nulle.*

Théorème 9.8. *Soit I_1 un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Les I_1-solutions de (E) forment une droite affine de dimension 1. De plus, les solutions maximales sont définies sur I.*

Si l'équation n'est pas mise sous forme résolue, on résout d'abord sur les intervalles où A ne s'annule pas, puis on se pose la question du recollement des solutions.

9.3. **Résolution pratique.** La théorie du paragraphe précédent fournit les solutions de façon explicite. Cependant, il vaut mieux retenir le principe (très général) de la démonstration :

i. on résout l'équation homogène (H),
ii. on cherche une solution particulière de (E) : soit on en trouve une explicite, soit on utilise la méthode de variation de la constante (qui marche à coup sûr !).

Proposition 9.9 (Superposition des solutions)**.** *Considérons l'équation :*

$$A(x)y' + B(x)y = \sum_i^n C_i(x)\,,$$

avec A, B, C_i continues sur I et avec A ne s'annulant pas sur I. Si y_i est une solution de

$$A(x)y' + B(x)y = C_i(x)\,,$$

alors, $\sum_i^n y_i$ est solution de (E).

Exemple 9.10. $xy' - y = \ln(x) + 1$

Théorème 9.11 (Problème de Cauchy)**.** *On considère (E) avec A, B, C continues sur I et A ne s'annulant pas sur I. Alors, pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique solution Y de (E) définie sur I qui vérifie $Y(x_0) = y_0$. De plus, toute solution de (E) qui vérifie $y(x_0) = y_0$ est la restriction de Y à un intervalle contenant x_0.*

Lorsque A s'annule sur I, tous les résultats précédents (structure des solutions, existence, unicité) tombent en défaut : c'est le problème du raccord des solutions définies sur les intervalles où A ne s'annule pas.
Exemple : $ty' - \alpha y = 1$. Pour quelles valeurs de α existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$? Que dire du problème de Cauchy : existe-t-il des solutions telles que $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$?

9.4. **Cas des coefficients constants.**

Définition 9.12. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants toute équation de la forme :

$$y' + by = C(x), \qquad \text{où } C : I \to \mathbb{R} \text{ continue}\,.$$

Nous avons vu que les solutions de l'équation homogène sont de la forme : $y(x) = \lambda e^{-bx}$ et que les solutions de (E) sont définies sur I. Il y a des cas où on peut déterminer une solution particulière sans recourir à la méthode de variation de la constante.
$C(x) = P(x)$ où P est un polynôme. On cherche une solution particulière sous la forme $Q(x)$.
$C(x) = P(x)e^{\alpha x}$ où P est un polynôme. On cherche une solution sous la forme $e^{\alpha x}g(x)$.

Exemple 9.13.

$$y' - y = (x+1)e^x + \sin(2x) + x\cos(x) + \frac{1}{1+x^2}\,.$$

A.1. **Généralités.**

A.1.1. *Motivations.* Une motivation pour introduire les nombres complexes provient du fait que l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet pas de solution réelle, et plus généralement que certains polynômes n'admettent pas de racines réelles. Pour remédier à ce problème, on introduit un nouveau nombre (imaginaire) i dont la vertu principale est qu'il vérifie $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$.

A.1.2. *Propriétés algébriques.* L'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$ est un ensemble contenant $\mathbb{R}$, muni d'une addition $+$ et d'une multiplication $\cdot$ (qui étendent celles de $\mathbb{R}$ et jouissent des mêmes propriétés : commutativité, distributivité de la multiplication sur l'addition). Il contient un élément, noté i satisfaisant la propriété fondamentale :

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Pour tout élément z de $\mathbb{C}$, il existe (un unique) $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$z = a + \mathrm{i}b\,. \tag{A.1}$$

En résumant, l'ensemble des nombres complexes est donné par

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + \mathrm{i}b, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Définition A.1.

- On note $a = \mathrm{Re}\,(z)$ la partie réelle de z et $b = \mathrm{Im}\,(z)$ la partie imaginaire de z .
- L'écriture (A.1) est appelée écriture algébrique de z.
- Le nombre $z \in \mathbb{C}$ peut être représenté graphiquement par le point M du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (a, b). On dit que z est l'affixe de M.
- On appelle module de z le nombre positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ qui est la distance euclidienne entre $M(a, b)$ et l'origine $(0, 0)$.
- On appelle conjugué de z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe $a - \mathrm{i}b$. On observe que

$$|z|^2 = z\overline{z}.$$

Proposition A.2. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe un unique $w \in \mathbb{C}^*$ tel $zw = 1$. Le nombre w s'appelle l'inverse de z.*

Démonstration. On va chercher un nombre complexe w satisfaisant $zw = 1$. On aimerait prendre $w = \frac{1}{z}$, mais on n'a pas défini le sens de cette expression. Si on multiplie formellement le numérateur et le dénominateur par $\overline{z}$, on est amené à poser

$$w = \frac{\overline{z}}{|z|^2}\,,$$

et ce w convient et peut s'écrire sous la forme $a + \mathrm{i}b$.
Montrons qu'un tel w est unique. Si w_1 et w_2 sont tels que $zw_1 = 1 = zw_2$, alors $z(w_1 - w_2) = 0$. En multipliant par w, on en tire que $w_1 - w_2 = 0$. □

Proposition A.3. *Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :*

i. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$,

ii. *pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *et* $z_2 \neq 0$, $\overline{\frac{z_1^n}{z_2^m}} = \frac{\overline{z_1}^n}{\overline{z_2}^m}$

iii. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,

iv. $|z_1^n| = |z_1|^n$

v. $|z_1| = |\overline{z_1}|$,

vi. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(inégalité triangulaire).*

Démonstration.

i. La preuve se fait un travers un calcul direct. Posons

$$z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1, \quad z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2, \quad \text{avec} \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Alors en développant le calcul on trouve

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathrm{i}(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

et

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - \mathrm{i}(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Ainsi on peut facilement vérifier via les formes algébriques des nombres en jeu que

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}.$$

ii. Il suffit de démontrer les deux identités suivantes

$$\overline{z_1^n} = \overline{z_1}^n \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{1}{\overline{z_2}}.$$

La première découle d'une simple récurrence en utilisant i. Pour obtenir la deuxième propriété, on remplace dans i. z_1 par $\frac{1}{z_2}$ donnant lieu à

$$\overline{1} = \overline{z_2}\,\overline{\frac{1}{z_2}},$$

d'où $\overline{\frac{1}{z_2}} = \frac{1}{\overline{z_2}}$.

iii. En passant au carré, l'identité voulue est équivalente à

$$|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2,$$

ce qui revient à démontrer que

$$z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2}.$$

À cet effet, il suffit d'utiliser le point i de la proposition combiné avec la commutativité et l'associativité de la multiplication dans $\mathbb{C}$.

iv. On peut le démontrer via un argument de récurrence combiné avec le point iii.

v. Il se démontre facilement grâce à la définition du module.

vi. On va d'abord démontrer l'inégalité de droite, c'est à dire,

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{A.2}$$

Comme les deux membres de cette inégalité sont positifs, il faut et il suffit qu'on démontre

$$|z_1 + z_2|^2 \leq \big(|z_1| + |z_2|\big)^2. \tag{A.3}$$

En développant le module dans le membre de gauche, on trouve

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1}) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z_1 \overline{z_2}). \end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité (A.3) est équivalente à

$$\mathrm{Re}\,(z_1 \overline{z_2}) \leq |z_1||z_2| = |z_1||\overline{z_2}| = |z_1 \overline{z_2}|.$$

Il suffit maintenant d'utiliser la propriété suivante valable pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{Re}\,(z) \leq |z|\,.$$

Maintenant nous allons démontrer

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|\,,$$

qui est équivalente à

$$-|z_1 + z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|\,,$$

et qui se réécrit

$$|z_2| \leq |z_1| + |z_1 + z_2| \quad \text{et} \quad |z_1| \leq |z_2| + |z_1 + z_2|\,.$$

Pour obtenir la première inégalité, il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire (A.3) en échangeant z_1 et z_2 avec $Z_1 = z_1$ et $Z_2 = -(z_1 + z_2)$. De manière analogue on procède pour avoir l'inégalité de droite.

□

A.2. **L'exponentielle d'un nombre complexe.** Avant d'aller plus profondément dans la description des nombres complexes, rappelons quelques propriétés de l'exponentielle réelle.

A.2.1. *Définitions et propriétés.*

Définition A.4. Le logarithme népérien $\ln$ est défini par :

$$\forall x > 0\,, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{u}\mathrm{d}u\,.$$

Proposition A.5. *La fonction* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *est strictement croissante, indéfiniment dérivable, dont la dérivée est*

$$\forall x > 0\,, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Elle vérifie :

$$\forall x, y > 0\,, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)\,.$$

La fonction $\ln$ *réalise une bijection, c'est à dire que, pour tout* $y \in \mathbb{R}$*, il existe un unique* $x > 0$ *tel que* $y = \ln(x)$*. Ce* x *est noté* e^y*.*

Proposition A.6. *La fonction* $\mathbb{R} \ni y \mapsto e^y \in]0, +\infty[$*, qui s'appelle la fonction exponentielle, est indéfiniement dérivable et sa dérivée est la fonction exponentielle elle-même. Elle réalise une bijection et vérifie la propriété :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\,, \quad e^{x+y} = e^x e^y\,.$$

Proposition A.7. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivable en* 0 *de dérivée* $f'(0) = 1$ *et telle que :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\,, \quad f(x + y) = f(x)f(y)\,.$$

Alors, f *est la fonction exponentielle.*

Nous pouvons étendre le sens de l'exponentielle à l'aide de la proposition suivante (voir l'annexe suivante).

Proposition A.8 (définition de l'exponentielle complexe)**.** *Il existe une fonction* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, et une seule, qui satisfait les propriétés suivantes :*

i. $\displaystyle\lim_{\mathbb{C}^* \ni z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = 1$.
ii. $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $f(z + w) = f(z)f(w)$.

Cette fonction est notée $\exp$ *et on a* $\exp(z) = e^z$ *quand* $z \in \mathbb{R}$.

La proposition suivante rassemble des propriétés fondamentales de l'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dont nous admettrons l'existence et les propriétés.

Proposition A.9. *La fonction* $\exp$ *jouit des propriétés suivantes :*

i. $\forall z \in \mathbb{R}, \quad \exp(z) = e^z$.

ii. $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$.

iii. *pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$,

iv. *pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}\,(z)}$ *et en particulier, pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$, *on a* $|\exp(\mathrm{i}\theta)| = 1$,

v. *pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *on a* $\exp(z) \neq 0$ *et* $[\exp(z)]^{-1} = \exp(-z)$,

vi. *pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$, *on a*

$$\big[\exp(z)\big]^n = \exp(nz)\,.$$

Noter qu'on notera souvent, pour $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^z$.

A.2.2. *Les fonctions trigonométriques cosinus et sinus, le nombre* π. Dans ce paragraphe, nous allons faire la liaison entre l'exponentielle complexe et les fonctions trigonométriques usuelles. Notons que la proposition A.8 nous assure l'existence d'une fonction exponentielle définie sur tout le plan complexe et qui, restreinte à l'axe réel, donne la fonction exponentielle usuelle.

Définition A.10. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}\,(e^{\mathrm{i}\theta})\,, \qquad \sin(\theta) = \mathrm{Im}\,(e^{\mathrm{i}\theta})\,,$$

et on a en particulier la formule d'Euler :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\,.$$

Proposition A.11 (définition de π)**.** *Posons* $\mathcal{P} = \{\theta \in \mathbb{R} : e^{\mathrm{i}\theta} = 1\}$. *On a les propriétés suivantes :*

i. $0 \in \mathcal{P}$.

ii. *Pour tous* $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, *si* $\theta_1 \in \mathcal{P}$ *et* $\theta_2 \in \mathcal{P}$, *alors* $\theta_1 - \theta_2 \in \mathcal{P}$.

De plus, il existe un unique réel strictement positif p *tel que :*

$$\mathcal{P} = p\mathbb{Z} = \{pk, k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

On note :

$$\pi = \frac{p}{2}\,.$$

En particulier, on a :

$$e^{2\mathrm{i}\pi} = 1\,.$$

Corollaire A.12. *Nous avons les formules suivantes.*

i. $e^{\mathrm{i}\pi} = -1$, $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$*; ou encore :* $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

ii. *Pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *et* $z \in \mathbb{C}$, $e^{z+2\mathrm{i}n\pi} = e^z$.

iii. $\big\{x \in \mathbb{R}, e^{\mathrm{i}x} = 1\big\} = \big\{2\pi n, n \in \mathbb{Z}\big\}$.

iv. *Pour tout* $z = x + \mathrm{i}y$ *avec* $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\exp(z) = e^x\big(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)\big)\,. \tag{A.4}$$

v. *Formule de Moivre : pour tous* $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$

$$(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)\,.$$

On remarquera que, sous réserve qu'on sache définir les fonctions cosinus et sinus, la formule (A.4) permet de définir l'exponentielle d'un nombre complexe.

Exemple A.13. Montrer que la fonction $\cos$ est paire et que la fonction $\sin$ est impaire. Montrer que les zéros de la fonction $\sin$ sont exactement les nombres $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et ceux de $\cos$ les nombres $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition A.14. *Les fonctions cosinus et sinus jouissent des propriétés algébriques suivantes :*

i. *pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$,

ii. *pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$, $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$,

iii. $\cos$ *et* $\sin$ *sont* 2π*-périodiques,*

iv. *pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

Exemple A.15. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

A.2.3. *Formules de dévelopement et de linéarisation pour le cosinus et le sinus.* Nous rappelons la formule de Moivre vue auparavant. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n .$$

Cette formule est commode pour exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$, à partir du moment où on se souvient de la formule du binôme de Newton (mais on peut bien sûr fair elles calculs à la main sans connaître la formule !).

Proposition A.16. *Pour tout* $a, b \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} ,$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ *et et pour* $n \geq 1$ *on définit* $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ *comme la multiplication de tous les entiers de* 1 *à* n*. Pour* $n = 0$*, on fait la convention* $0! = 1$.

Exemple A.17. Vérifier que

$$1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta .$$

En reprenant la formule de Moivre avec $n = 3$ combinée avec la formule du binôme de Newton, on peut écrire

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta) &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta + 3\mathrm{i}^2\cos\theta\sin^2\theta + \mathrm{i}^3\sin^3\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + \mathrm{i}(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) . \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles des deux membres ainsi que les parties imaginaires on obtient

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ \sin(3\theta) &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta . \end{aligned}$$

Pour aller un peu plus loin, nous pouvons utiliser la formule du binôme et obtenir la proposition suivante.

Proposition A.18 (Polynômes de Tchebychev)**.** *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$\sin((n+1)x) = \sin x \, U_n(\cos x) , \quad \cos(nx) = T_n(\cos x) ,$$

où

$$U_n(X) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^\ell \binom{n+1}{2\ell+1} X^{n-2\ell}(1-X^2)^\ell \,,$$

et

$$T_n(X) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^\ell \binom{n}{2\ell} X^{n-2\ell}(1-X^2)^\ell \,.$$

Démonstration. On écrit

$$\sin((n+1)x) = \mathrm{Im}\,(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^{n+1} = \mathrm{Im}\sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{i}^k \binom{n+1}{k} \cos^{n+1-k} x \sin^k x \,.$$

On ne garde que les termes imaginaires purs et on a :

$$\sin((n+1)x) = \sin x \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n+1} \mathrm{i}^{k-1} \binom{n+1}{k} \cos^{n+1-k} x \sin^{k-1} x \,.$$

En réécrivant cette somme, on en déduit le résultat. On procède de même pour le cosinus. □

Inversement, on peut tâcher d'exprimer $\cos^n \theta$ en fonction de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$; cette procédure est appelée linéarisation. Elle est basée sur la proposition élémentaire suivante.

Proposition A.19. *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$\cos\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \,, \quad \sin\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}} \,.$$

Exemple A.20. Nous allons linéariser $\cos^3\theta$. A cet effet on écrit via la formule du binme

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \frac{1}{8}\left(e^{3\mathrm{i}\theta} + 3e^{\mathrm{i}\theta} + 3e^{-\mathrm{i}\theta} + e^{-3\mathrm{i}\theta}\right) \\
&= \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(3\theta)
\end{aligned}$$

L'exemple suivant donne la linéarisation de $\cos^{2n+1}\theta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\cos^{2n+1}\theta &= \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} e^{(2k-2n-1)\mathrm{i}\theta} \\
&= \frac{1}{2^{2n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} e^{(2k-2n-1)\mathrm{i}\theta} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} e^{(2k-2n-1)\mathrm{i}\theta} \right)
\end{aligned}$$

En faisant dans la deuxième somme le changement d'indice $j = 2n+1-k$ tout en remarquant que

$$\binom{2n+1}{k} = \binom{2n+1}{j} \,,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\cos^{2n+1}\theta &= \frac{1}{2^{2n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} e^{(2k-2n-1)\mathrm{i}\theta} + \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{j} e^{(2n+1-2j)\mathrm{i}\theta} \right) \\
&= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} \cos[(2n+1-2k)\theta] \,.
\end{aligned}$$

A.2.4. *Forme exponentielle d'un nombre complexe.* Nous admettrons la proposition suivante qui concerne une propriété fondamentale de l'exponentielle.

Proposition A.21. *La fonction* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *est surjective. Autrement dit, pour tout* $z' \in \mathbb{C}^*$*, il existe* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $z' = \exp(z)$*.*

Nous sommes maintenant armés pour comprendre la proposition suivante.

Proposition A.22. *(Forme trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe) Pour tout* $z \in \mathbb{C}^*$*, il existe un unique couple* $(\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times] - \pi, \pi]$ *tel que :*

$$z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}\,.$$

De plus, on a $|z| = \rho$*.* θ *est appelé argument principal de* z *et noté* $\operatorname{Arg}(z)$*. Tous les autres* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tels que* $z = \rho e^{\mathrm{i}\alpha}$ *sont de la forme* $\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$*. Un tel* α *est appelé argument de* z *et est noté* $\arg(z)$*.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Par la proposition précédente, il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que $z = \exp(w)$. On écrit $w = a + \mathrm{i}b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et on déduit que :

$$z = e^a e^{\mathrm{i}b}\,.$$

On pose $\rho = e^a > 0$. Si $b \in (-\pi, \pi]$, on pose $b = \theta$; sinon, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b + 2k\pi \in (\pi, \pi]$ et on pose $b + 2k\pi = \theta$.

Vérifions qu'un tel couple (ρ, θ) est unique. Supposons que $(\rho, \theta), (\tilde{\rho}, \tilde{\theta}) \in]0, +\infty[\times(-\pi, \pi]$ sont tels que :

$$\rho e^{\mathrm{i}\theta} = \tilde{\rho} e^{\mathrm{i}\tilde{\theta}}\,.$$

En prenant le module, on trouve $\rho = \tilde{\rho}$ et donc $e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}\tilde{\theta}}$ si bien qu'on déduit $e^{\mathrm{i}(\theta-\tilde{\theta})} = 1$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta - \tilde{\theta} = 2k\pi$. Or, on a $|\theta - \tilde{\theta}| < 2\pi$ et donc $k = 0$. □

Exemple A.23. On a :

$$\operatorname{Arg}(\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}, \operatorname{Arg}(-1) = \pi, \operatorname{Arg}(1 + \mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}, \operatorname{Arg}(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{6}, \operatorname{Arg}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}\,.$$

Comme conséquence de la forme exponentielle on a les propriétés suivantes.

Corollaire A.24. *Soient* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ *et* $n \in \mathbb{Z}$*. Alors*

i. $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi]$,

ii. $\arg(\frac{z_1}{z_2}) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$,

iii. $\arg(z_1^n) \equiv n\arg(z_1)[2\pi]$.

Démonstration. Les formes exponentielles de z_1 et z_2 sont données par

$$z_1 = r_1 e^{\mathrm{i}\theta_1},\ z_2 = |z_2| e^{\mathrm{i}\theta_2} \quad \text{avec} \quad r_1 = |z_1|, r_2 = |z_2|\,.$$

Ainsi on obtient grâce à la Proposition A.9,

$$z_1 z_2 = r_1 e^{\mathrm{i}\theta_1} r_2 e^{\mathrm{i}\theta_2} = r_1 r_2 e^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}\,.$$

Il s'ensuit que $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ (une chose qu'on connait déjà) et $\theta_1 + \theta_2$ est un argument possible de $z_1 z_2$.

Les derniers points s'obtiennent par un argument similaire tout en utilisant de manière fondamentale la Proposition A.9. □

Exemple A.25. On a $\arg(\frac{(1+\mathrm{i})^5}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^7}) = 5\frac{\pi}{4} - 7\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$ et $\operatorname{Arg}(\frac{(1+\mathrm{i})^5}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^7}) = \frac{\pi}{12}$.

A.2.5. *Géométrie.* La forme exponentielle des nombres complexes est parfois appelée forme géométrique. Pour $z \in \mathbb{C}^*$, nous pouvons écrire

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|\cos\theta + \mathrm{i}|z|\sin\theta\,,$$

si bien que θ représente l'angle orienté entre le vecteur $(1,0)$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$. En d'autres termes, si $z = a + ib \neq 0$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|}\,, \quad \sin\theta = \frac{b}{|z|}\,.$$

Exemple A.26. Cherchons la forme exponentielle de $z = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$. D'abord, on a

$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \sqrt{3} + \mathrm{i} = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\,.$$

D'après les propriétés de l'exponentielle, on peut écrire

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} \\ &= \frac{\cos\frac{\pi}{12}}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant chercher les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. Pour se faire, on va calculer la forme algébrique du nombre complexe z. Cela se fait à travers un passage au conjugué de son dénominateur. Précisément, on écrit

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+\mathrm{i})(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{|\sqrt{3}+\mathrm{i}|^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{4}\,. \end{aligned}$$

En identifiant les formes trigonométrique et algébrique, on trouve

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\,.$$

Proposition A.27. *Soit z un nombre complexe de partie imaginaire non nulle. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a : $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ et, si θ désigne l'argument principal de z, on a $\tan\theta = \frac{y}{x}$.*

Proposition A.28 (Formule du losange)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :*

$$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{b-a}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}\,.$$

Pour illustrer une nouvelle fois la puissance de l'interprétation géométrique des nombres complexes, nous allons montrer la proposition suivante.

Proposition A.29 (Théorème de l'angle au centre)**.** *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a :*

$$\tan\left(\frac{\mathrm{Arg}z}{2}\right) = \frac{\mathrm{Im}\,z}{\mathrm{Re}\,z + |z|}\,.$$

Démonstration. Écrivons $z = x + \mathrm{i}y = re^{\mathrm{i}\theta}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $r = |z|, \theta = \mathrm{Arg}z \in]-\pi, \pi[$. Alors l'identité devient

$$\tan(\theta/2) = \frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Supposons d'abord que $x > 0$ et rappelons que $\tan\theta = \frac{y}{x}$, alors l'identité à démontrer se réécrit

$$\tan(\theta/2) = \frac{y}{x + x\sqrt{1+(y/x)^2}}$$

ou encore, en factorisant par x,

$$\tan(\theta/2) = \frac{\tan\theta}{1+\sqrt{1+\tan^2\theta}}\,.$$

Comme on a supposé que $x > 0$, on a $\cos\theta \geq 0$ et

$$\frac{\tan\theta}{1+\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\,.$$

En utilisant les identités de l'Exemple A.17, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} &= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \tan\frac{\theta}{2}\,. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat désiré. Dans le cas où $x \leq 0$, ce qui revient à supposer que $\cos\theta \leq 0$, la même démarche donne la même formule. □

A.3. **Racines.**

A.3.1. *Racines carrées : préliminaires.* On sait trouver les racines carrées des nombres réels positifs. Soit $r > 0$. Alors l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $x^2 = r$ possède exactement une solution positive notée $\sqrt{r} \geq 0$ et une solution négative qui vaut $-\sqrt{r} \leq 0$. Cela vient notamment du fait que $]0,+\infty[\ni x \mapsto x^2 \in]0,+\infty[$ est une bijection (continue et strictement croissante).

Si on cherche les $z \in \mathbb{C} : z^2 = r$, on se ramène à $z^2 - (\sqrt{r})^2 = 0$ et on factorise : $(z-\sqrt{r})(z+\sqrt{r}) = 0$. On en déduit, par la Proposition A.2, que $z = \sqrt{r}$ ou $z = -\sqrt{r}$.

En fait, on sait aussi trouver facilement les racines carrées des nombres négatifs. Soit $r \geq 0$. Cherchons les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 = -r$. On écrit $-1 = i^2$ et l'équation est équivalente à $z^2 = i^2 r = (i\sqrt{r})^2$. En factorisant, on en déduit que $z = i\sqrt{r}$ ou $z = -i\sqrt{r}$.

A.3.2. *Racines carrées : cas général.* Examinons à présent le cas général.

Proposition A.30. *Soit $c \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Im} c \neq 0$. Les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = c$ sont exactement les nombres*

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\frac{b}{2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}$$

et

$$-\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\frac{b}{2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}\,,$$

où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sont tels que $c = a+ib$. En particulier, il n'y a qu'une seule solution de partie réelle positive.

Démonstration. On suppose que c est de partie imaginaire non nulle. On écrit $c = a+ib$ avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$ et $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On cherche donc x et y. L'équation est équivalente à :

$$(x+iy)^2 = a+ib\,,$$

ou encore à :

$$x^2 - y^2 = a\,, \quad 2xy = b\,. \tag{A.5}$$

Comme b est non nul, les possibles x et y ne le sont pas non plus. L'équation du module tirée de $z^2 = c$ donne

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}\,. \tag{A.6}$$

En sommant la première équation de (A.5) et (A.6), on obtient

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right), y = \frac{b}{2x}\,. \tag{A.7}$$

Il s'ensuit qu'il y a deux solutions données par

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)}, \; y = \frac{b}{2\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)}}$$

et

$$x = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)}, \; y = -\frac{b}{2\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)}}$$

□

A.3.3. *Équations du second degré.* Nous allons maintenant généraliser la Proposition 2.13 en résolvant les équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$. Mais d'abord, nous allons étendre un peu la Proposition 2.13 en donnant les solutions dans $\mathbb{C}$ quand $\Delta < 0$.

Proposition A.31. *On reprend les notations et les hypothèses de la Proposition 2.13. Quand $\Delta < 0$, il y a deux solutions dans $\mathbb{C}$ à l'équation $az^2 + bz + c = 0$ et elles sont conjuguées l'une de l'autre :*

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\,, \qquad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\,.$$

Proposition A.32. *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par*

$$\forall z \in \mathbb{C}\,, \quad f(z) = az^2 + bz + c\,.$$

On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$ et on considère l'unique $\delta \in \mathbb{C}$ de partie réelle positive tel que $\delta^2 = \Delta$. Alors

i. *quand $\Delta \neq 0$, l'équation $f(z) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$:*

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}\,.$$

ii. *quand $\Delta = 0$, l'équation $f(z) = 0$ n'admet qu'une seule solution dans $\mathbb{C}$:*

$$z_0 = -\frac{b}{2a}\,.$$

Démonstration. Démonstration. On va écrire $f(z)$ comme le début d'un carré.

$$\begin{aligned} f(z) &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z\right) + c \\ &= a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

Ainsi l'équation $f(z) = 0$ est équivalente à

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2,$$

et donc

$$z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z + \frac{b}{2a} = -\frac{\delta}{2a}\,.$$

Cela donne les seules solutions complexes. □

□

A.3.4. *Racines de l'unité.* Nous allons maintenant examiner les racines de polynômes spéciaux de degré supérieur à 2. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition A.33. *Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Alors l'équation*

$$z^n = 1\,,$$

admet exactement n solutions distinctes, notées $(z_k)_{k=0,\dots,n-1}$ dont les expressions sont :

$$z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}\,.$$

Les points M_k d'affixes z_k appartient au cercle de rayon 1 de centre $(0,0)$ et forment un polygone régulier à $n-1$ côtés. De plus

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0.$$

Démonstration. Il est aisé de vérifier que les z_k sont en effet des solutions. Montrons que ce sont les seules par une méthode explicite. On remarque déjà que, si z est solution, on a $|z^n| = 1$, et donc $|z|^n = 1$ si bien que $|z| = 1$. Les solutions sont de module 1. Il existe donc $\theta \in]-\pi,\pi]$ tel que $z = e^{i\theta}$. Ainsi, l'équation devient $e^{in\theta} = 1$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $n\theta = 2k\pi$. Ainsi, cela montre que l'ensemble des solutions est

$$\left\{z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Or, on remarque que $z_{k+n} = z_k$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, on a

$$\left\{z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0,\dots,n-1\}\right\}.$$

Pour $k, \ell \in \{0,\dots,n-1\}$ tels que $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i\ell\pi}{n}}$, on déduit que $\frac{k-\ell}{n} \in \mathbb{Z}$ et donc $k = \ell$. Les $(z_k)_{k=0,\dots,n-1}$ sont donc distincts.

Concernant l'affirmation sur le polygone, nous allons calculer la distance entre M_k et M_{k+1} pour $k \in \{0,\dots,n-1\}$ et démontrer qu'elle ne dépend pas de k. Cette distance est le module $|z_{k+1} - z_k|$. Noter que $z_n = z_0 = 1$. Or, par la Proposition A.28, on a

$$z_{k+1} - z_k = e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{b-a}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}\,,$$

où $a = \frac{2(k+1)\pi}{n}$, $b = \pi + \frac{2k\pi}{n}$. On en déduit donc que :

$$|z_{k+1} - z_k| = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)\right).$$

Ce nombre est indépendant de k.
Reste à vérifier le dernier point concernant la somme des z_k. Géométriquement ce point représente le centre de gravité du polygone régulier. On écrit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} z_k &= \sum_{k=0}^{n-1}(e^{\frac{2i\pi}{n}})^k \\ &= \frac{1-(e^{\frac{2i\pi}{n}})^n}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} \\ &= \frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Notons que nous avons utilisé la propriété suivante des suites géométriques de raison $r \neq 1$: pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \geq m$,

$$\sum_{k=m}^{n} r^n = r^m \frac{1-r^{n-m+1}}{1-r}\,.$$

□

Exemple A.34. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $1 + z + z^2 + z^3 = 0$.

A.3.5. *Racines n-ième d'un nombre complexe.* Nous allons généraliser la Proposition A.33 en fournissant les racines n-ième d'un nombre complexe.

Proposition A.35. *Soit $w \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. L'équation $z^n = w$ admet n solutions distinctes données par :*

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}\,, \quad z_k = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg w}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}\,.$$

Démonstration. On écrit $w = |w|e^{i\arg w}$ et en divisant par w, on en déduit que

$$\left(\frac{z}{|w|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg z}{n}}}\right)^n = 1\,.$$

On applique alors le résultat de la Proposition A.33. □

Exemple A.36. Trouver les racines 4-ièmes de $(1+i)^3$.

Annexe B. Pour aller beaucoup plus loin : définition de l'exponentielle complexe, définition de π

B.1. Limite d'une suite de nombres complexes.

Définition B.1. On dit qu'une suite (z_n) de nombres complexes tend vers $\ell \in \mathbb{C}$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists N \in \mathbb{N}\,, \forall n \in \mathbb{N}\,, (n \geq N \Longrightarrow |z_n - \ell| \leq \varepsilon)\,.$$

Un tel ℓ est unique. C'est la limite de la suite z.

En remarquant que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\max(|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z|) \leq |z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|\,.$$

Proposition B.2. *Une suite z de nombres complexes converge vers ℓ si et seulement si $\mathrm{Re}\, z$ converge vers $\mathrm{Re}\, \ell$ et $\mathrm{Im}\, z$ converge vers $\mathrm{Im}\, \ell$.*

Il est immédiat de généraliser la notion de fonction de la variable réelle à **valeurs réelles** dérivable en la notion de fonction de la variable réelle à **valeurs complexes**. Il suffit pour cela de remplacer la valeur absolue par le module dans la définition de la limite. On vérifie aisément qu'une fonction de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$ admet une limite (resp. est continue/dérivable) en un point si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire ont une limite (resp. sont continues/dérivables) en ce point.

On peut également donner un sens à la limite, à la continuité et à la dérivabilité pour les fonctions de la variable complexe et à valeurs complexes. En particulier, la dérivabilité est définie comme suit.

Définition B.3. On dit que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists \eta > 0\,, \forall z \in \mathbb{C}\,,$$
$$\left(|z - z_0| \leq \eta\,, z \neq z_0 \Longrightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \ell \right| \leq \varepsilon \right) .$$

Un tel ℓ est unique, c'est la $\mathbb{C}$-dérivée de f en z_0. On note $\ell = f'(z_0)$.

B.2. **Définition rigoureuse de l'exponentielle et propriétés.**

B.2.1. *Définition.* On a montré, dans l'Exemple 8.29, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite e^x. On note :

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} .$$

Cette formule permet d'étendre la fonction exponentielle à $\mathbb{C}$ tout entier. Posons, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$E_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} .$$

Proposition B.4. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $(E_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note sa limite* $\exp(z)$. *Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x = \exp(x)$. De plus, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\exp z| \leq e^{|z|}$.*

Démonstration. On pose $e_k(z) = \frac{z^k}{k!}$ et on remarque que :

$$e_k(z) = a_k(z) + ib_k(z)\,, \quad a_k(z) = \operatorname{Re} e_k(z)\,, b_k(z) = \operatorname{Im} e_k(z)\,.$$

De plus, si on pose, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a_+ = \max(a, 0)$ et $a_- = \max(-a, 0)$, alors on obtient

$$a = a_+ - a_-\,, \quad |a| = a_+ + a_-\,,$$

et donc :

$$e_k(z) = (a_k(z))_+ - (a_k(z))_- + i\left[(b_k(z))_+ - (b_k(z))_-\right] .$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$E_n(z) = A_{n,+}(z) - A_{n,-}(z) + i\left(B_{n,+}(z) - B_{n,-}(z)\right)\,,$$

où

$$A_{n,\pm}(z) = \sum_{k=0}^{n} (a_k(z))_\pm\,, \quad B_{n,\pm}(z) = \sum_{k=0}^{n} (b_k(z))_\pm\,.$$

Il est clair que les quatre suites $(A_{n,\pm}(z))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_{n,\pm}(z))_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes. Elles tendent donc vers une limite finie ou $+\infty$. Montrons qu'elles sont majorées. On observe que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_{n,\pm}(z) \leq \sum_{k=0}^{n} |e_n(z)| \leq \sum_{k=0}^{n} e_n(|z|) \leq e^{|z|}\,,$$

et de même :

$$B_{n,\pm}(z) \le e^{|z|}\,.$$

On en déduit aisément que $(E_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et la conclusion s'ensuit en remarquant que :

$$|E_n(z)| \le e^{|z|}\,.$$

□

B.2.2. *Propriétés.* La fonction exponentielle vérifie de nombreuses propriétés remarquables.

Proposition B.5. *La fonction* $\exp$ *est* $\mathbb{C}$*-dérivable en* 0 *et* $\exp'(0) = 1$.

Démonstration. On observe que, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = 1 + z + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\,,$$

et donc, pour $z \neq 0$,

$$\frac{\exp(z) - 1}{z} - 1 = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}\,.$$

On en tire que :

$$\left|\frac{\exp(z) - 1}{z} - 1\right| \le \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|z|^{k-1}}{k!} \le \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|z|^{k-1}}{(k-1)!} \le |z|e^{|z|}\,.$$

Par continuité de l'exponentielle réelle en 0, le membre de droite tend vers 0 quand z tend vers 0. □

Proposition B.6. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$*, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)\,.$$

Démonstration. Il s'agit de montrer que la suite du membre de gauche converge. On observe que :

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k}\,.$$

On en déduit que :

$$\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| \le \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} - \frac{1}{k!}\right| |z|^k\,.$$

On peut vérifier que, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} - \frac{1}{k!} \le 0\,.$$

Ainsi, on en tire que :

$$\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| \le \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n\,.$$

Or, on a :

$$\left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{|z|}{n}\right)}\,.$$

En utilisant la dérivabilité de $\ln$ en 1, on obtient que

$$n\ln\left(1+\frac{|z|}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\to}|z|\,.$$

Il s'ensuit que :

$$\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n-\sum_{k=0}^{n}\frac{|z|^k}{k!}\underset{n\to+\infty}{\to}e^{|z|}-e^{|z|}=0\,.$$

□

On en déduit la proposition fondamentale suivante.

Proposition B.7. *Pour tout* $w,z\in\mathbb{C}$*, on a :* $\exp(w+z)=\exp(w)\exp(z)$.

Démonstration. On écrit, pour tout $w,z\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$,

$$\left(1+\frac{w}{n}\right)^n\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\left(1+\frac{w+z}{n}+\frac{wz}{n^2}\right)^n\,. \tag{B.1}$$

On rappelle que, pour tout $a,b\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}$,

$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=1}^{n-1}a^kb^{n-k-1}\,.$$

On observe alors que :

$$\left(1+\frac{w+z}{n}+\frac{wz}{n^2}\right)^n-\left(1+\frac{w+z}{n}\right)^n$$
$$=\frac{wz}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{w+z}{n}+\frac{wz}{n^2}\right)^k\left(1+\frac{w+z}{n}\right)^{n-k-1}\,.$$

Il en découle :

$$\left|\left(1+\frac{w+z}{n}+\frac{wz}{n^2}\right)^n-\left(1+\frac{w+z}{n}\right)^n\right|$$
$$\leq\frac{|w||z|}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{|w|+|z|}{n}+\frac{|w||z|}{n^2}\right)^k\left(1+\frac{|w|+|z|}{n}\right)^{n-k-1}\,.$$

Ainsi, on a :

$$\left|\left(1+\frac{w+z}{n}+\frac{wz}{n^2}\right)^n-\left(1+\frac{w+z}{n}\right)^n\right|$$
$$\leq\left(1+\frac{|w|+|z|}{n}+\frac{|w||z|}{n^2}\right)^n-\left(1+\frac{|w|+|z|}{n}\right)^n\,.$$

On remarque alors que :

$$\left(1+\frac{|w|+|z|}{n}+\frac{|w||z|}{n^2}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{|w|+|z|}{n}+\frac{|w||z|}{n^2}\right)}\underset{n\to+\infty}{\to}e^{|w|+|z|}\,,$$

en utilisant la dérivabilité de $\ln$ en 1. De même, on a :

$$\left(1+\frac{|w|+|z|}{n}+\frac{|w||z|}{n^2}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\to}e^{|w|+|z|}\,.$$

On en conclut que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\left(1+\frac{w+z}{n}+\frac{wz}{n^2}\right)^n-\left(1+\frac{w+z}{n}\right)^n\right\}=0\,.$$

Il ne reste plus qu'à passer à la limite dans (B.1) et utiliser la Proposition B.6. □

Proposition B.8. *La fonction* $\exp$ *est* $\mathbb{C}$*-dérivable en tout point de* $\mathbb{C}$ *et, pour tout* $z\in\mathbb{C}$, $\exp'(z)=\exp(z)$.

Démonstration. On sait que le résultat est vrai en 0 (cf. Proposition B.5). Soit $z_0\in\mathbb{C}$. On écrit, pour $z\neq 0$,

$$\frac{\exp(z_0+z)-\exp(z_0)}{z}=\exp(z_0)\frac{\exp z-1}{z}\,,$$

par la Proposition B.7. Le résultat s'en déduit en passant à la limite $z\to 0$. □

En adaptant le théorème de dérivation des composées de fonctions dérivables (Proposition 7.14) à la $\mathbb{C}$-dérivabilité, on obtient la proposition suivante.

Proposition B.9. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *non vide. Si* $\phi : I\to\mathbb{C}$ *est dérivable et si* $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *est* $\mathbb{C}$*-dérivable en tout point, alors* $t\mapsto f(\phi(t))$ *est dérivable sur* I *et de dérivée* $t\mapsto\phi'(t)f'(\phi(t))$.

On en déduit immédiatement la proposition suivante.

Proposition B.10. *La fonction* $f:\mathbb{R}\ni x\mapsto e^{ix}\in\mathbb{C}$ *est dérivable en tout point de* $\mathbb{R}$ *et* $f'(x)=ie^{ix}$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$*. De plus, les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et* $\sin'=\cos$, $\cos'=-\sin$.

Nous avons maintenant le moyen de prouver la Proposition A.8 admise au début de ce cours.

Démonstration. Soit f satisfaisant les propriétés de la Proposition A.8, avec f non nulle. On a $f(0)^2=f(0)$. On a donc $f(0)=1$ ou $f(0)=0$. Si on a $f(0)=0$, on déduit que f est identiquement nulle. Ainsi, $f(0)=1$. On introduit alors la fonction auxiliaire :

$$\forall z\in\mathbb{C}\,,\quad g(z)=f(z)\exp(-z)\,.$$

On a encore, pour tout $w,z\in\mathbb{C}$, $g(w+z)=g(w)g(z)$. La fonction g est $\mathbb{C}$-dérivable en 0 et $g'(0)=0$. On peut alors utiliser le même argument que dans la preuve de la Proposition B.8 pour déduire que g est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $\mathbb{C}$ et que $g'(z)=0$ pour tout $z\in\mathbb{C}$. On en déduit (conséquence de la Proposition B.9, admis) que g est constante égale à $g(0)=1$. □

B.3. **Surjectivité de l'exponentielle.**

Proposition B.11. *La fonction* $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$ *est surjective.*

Démonstration. Pour $z\in\mathbb{C}$ qui n'est pas un réel négatif, on pose [1] :

$$Z=\int_0^1\frac{z-1}{1+t(z-1)}\mathrm{d}t\,.$$

On vérifie facilement que cette intégrale est bien définie. On montre que

$$\exp(Z)=z\,.$$

1. L'intégrale d'une fonction continue f sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est par définition $\int_a^b f=\int_a^b \operatorname{Re} f+i\int_a^b \operatorname{Im} f$.

Pour cela, on introduit l'intégrale suivante (d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$) :

$$f(u) = \int_0^u \frac{z-1}{1+t(z-1)}\mathrm{d}t\,.$$

La fonction $u \mapsto \exp(f(u))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$f'(u)\exp(f(u)) = \exp(f(u))\frac{z-1}{1+u(z-1)}\,.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\exp(f(u))'(1+u(z-1)) = \exp(f(u))(z-1)\,,$$

ou encore :

$$\left(\frac{\exp(f(u))}{1+u(z-1)}\right)' = 0\,.$$

En prenant la valeur en 0, on trouve :

$$\exp(f(u)) = 1+u(z-1)\,.$$

Alors, on a : $\exp(Z) = z$. Tous les nombres complexes non négatifs sont donc atteints par l'exponentielle. Si $a \in \mathbb{R}_-^*$, on écrit : $a = i^2 b$ avec $b = -a > 0$. On peut écrire $b = \exp(Z)$. Mais, on peut aussi écrire $i = \exp(Z')$ et donc $i^2 = \exp(2Z')$. Par conséquent, on a $a = \exp(Z+2Z')$. $\square$

B.4. **Qu'est-ce que π ?** Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme B.12 (Division euclidienne)**.** *Soit x un réel positif et y un réel strictement positif. Alors, il existe un unique couple $(m,r) \in \mathbb{N}\times[0,y[$ tel que :*

$$x = my + r\,.$$

Démonstration. On introduit

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x - ny \geq 0\} \subset \mathbb{N}\,.$$

A est une partie non vide et majorée (dès que n dépasse strictement la partie entière de $\frac{x}{y}$, n n'appartient pas à A) de l'ensemble des entiers naturels. Elle admet donc un plus grand élément qu'on note m. On a par définition $x - my \geq 0$ et $x-(m+1)y < 0$. On pose donc $r = x - my$ et on a bien $r \in [0,y[$. Montrons l'unicité d'un tel couple (m,r). Soit un autre couple $(\tilde{m},\tilde{r})$ avec les mêmes propriétés. On aurait :

$$x = my + r = \tilde{m}y + \tilde{r}\,,$$

avec $r,\tilde{r} \in [0,y[$ et $m,\tilde{m} \in \mathbb{N}$. On doit donc avoir $|\tilde{r}-r| < y$. Mais, si $m \neq \tilde{m}$, on a $|r-\tilde{r}| \geq y$. On a donc $m = \tilde{m}$ et par suite $r = \tilde{r}$. $\square$

Proposition B.13 (Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$)**.** *Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et telle que, pour tout $x,y \in A$, $x-y \in A$. Alors, nous avons :*

i. *soit tous les réels sont adhérents à A (tout intervalle non vide contient un élément de A),*
ii. *soit il existe $a \geq 0$ tel que : $A = a\mathbb{Z}$.*

Démonstration. A n'étant pas vide, il contient un certain x_0 et par conséquent il contient $x_0 - x_0 = 0$ et par suite A est stable par passage à l'opposé et par conséquent par l'addition :

$$\forall (x,y) \in A^2\,,\quad -x \in A \,\text{et}\, x+y \in A\,.$$

Supposons que A ne soit pas réduit à $\{0\}$. A contient donc un élément non nul (ainsi que son opposé) et donc un élément strictement positif. L'ensemble $A \cap]0,+\infty[\subset \mathbb{R}$ est donc non vide et minoré par 0. Il admet donc une borne inférieure $a \geq 0$.

i. Supposons que $a = 0$. Montrons que tout réel est adhérent à A. Montrons que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq x < y$, il existe $a' \in A$ tel que $x < a' < y$. Soit $\varepsilon = \frac{y-x}{2} > 0$. Par définition de a, il existe $\tilde{a} \in A$ tel que $0 < \tilde{a} < \varepsilon$. Soit $n \in \mathbb{N}$ le plus grand entier tel que $n\tilde{a} \leq x$. Alors, on a $(n+1)\tilde{a} > x$. De plus, $n\tilde{a} + \tilde{a} \leq x + \frac{y-x}{2} < y$. Or $(n+1)\tilde{a} \in A$ du fait de la stabilité de A par l'addition. On a bien trouvé un élément de A entre deux nombres positifs distincts. La stabilité par passage à l'opposé permet de montrer que tout segment inclus dans $]-\infty, 0]$ contient un élément de A. Enfin, un intervalle $[a, b]$ avec $a < 0 < b$ contient toujours $0 \in A$.

ii. Supposons que $a > 0$. Montrons que $A = a\mathbb{Z}$. On commence par montrer que $a \in A$. Si tel n'est pas le cas, il existe $a' \in A$ tel que $a < a' \leq \frac{3a}{2}$, par définition de la borne inférieure. Pour la même raison, on peut encore trouver $a'' \in A$ tel que $a < a'' < a'$. Alors, on a $0 \leq a' - a'' \leq \frac{3a}{2} - a = \frac{a}{2} < a$ et $a' - a'' \in A \cap]0, +\infty[$. Cela contredit la définition de a. On a donc montré que $a \in A$. On en déduit que $a\mathbb{Z} \subset A$.

   Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in A$ avec $x \geq 0$. Par le Lemme B.12, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $r \in [0, a[$ tels que $x = ma + r$. Or $ma \in A$ et donc $r = x - ma \in A$. Par définition de a, on doit avoir $r = 0$ (sinon on aurait trouvé un élément non nul plus petit que la borne inférieure) ; cela signifie que $x \in a\mathbb{Z}$. Soit $x \in A$ avec $x \leq 0$. On a $-x \in A$ et $-x \geq 0$ et donc $-x \in a\mathbb{Z}$ si bien que $x \in a\mathbb{Z}$. On en déduit que $A \subset a\mathbb{Z}$.

$\square$

Démontrons enfin la Proposition A.11.

Démonstration. On définit

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R} : e^{ix} = 1\}.$$

L'ensemble $\mathcal{P}$ contient 0 et est stable par différence. On peut appliquer la Proposition B.13. Si tous les réels sont adhérents à A, cela signifie que tout réel α est limite d'une suite (x_n) d'éléments de A. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{ix_n} = 1$. En utilisant la continuité de l'exponentielle complexe (qui est une conséquence de la $\mathbb{C}$-dérivabilité), on en déduit que : $e^{i\alpha} = 1$ par passage à la limite. Ainsi, on a $\alpha \in \mathcal{P}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. On aurait alors $e^{ix} = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On dérive alors cette identité au moyen de la Proposition B.9 et une contradiction s'ensuit. Il doit donc exister $p \geq 0$ tel que $\mathcal{P} = p\mathbb{Z}$. Il suffit de montrer que p n'est pas nul. Par surjectivité de l'exponentielle, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $i = \exp(\alpha)$. On en déduit qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $e^{ix_0} = i$ et donc $e^{4ix_0} = 1$, soit $4x_0 \in A$. A n'est donc pas réduit à 0. $\square$

ANNEXE C. DÉVELOPPEMENT DU SINUS EN PRODUIT EULÉRIEN

L'objet de cet annexe est de montrer, par des moyens élémentaires (essentiellement l'étude des racines de polynômes), une célèbre formule d'Euler. Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Cela s'appelle le développement du sinus en produit eulérien.

C.1. **Une suite de polynômes introduite par Euler.** Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ impair. On pose

$$P_n(z) = \frac{\left(1 + i\frac{z}{n}\right)^n - \left(1 - i\frac{z}{n}\right)^n}{2i}.$$

i. Montrer que P_n est un polynôme impair à coefficients réels.

ii. Quel est le coefficient dominant de P_n en fonction de n et quel est le coefficient qui apparaît devant z ?

iii. Trouver toutes les racines réelles de P_n (on remarquera qu'elles sont symétriques par rapport à 0).

iv. Le lecteur curieux (et motivé) pourra s'amuser à montrer que

$$P_n(z) = z \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right).$$

v. En utilisant la Proposition B.6, prouver que la suite $(P_n(z))$ converge vers $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.

C.2. **Une suite de polynômes introduite par Tchebychev.** On considère $n = 2m$ dans la Proposition A.18 avec $m \in \mathbb{N}$. Montrer qu'on a :

$$\sin((2m+1)x) = \sin x V_{2m}(\sin x),$$

où

$$V_{2m}(X) = \sum_{\ell=0}^{m} (-1)^\ell \binom{2m+1}{2\ell+1} (1-X^2)^{m-\ell} X^{2\ell}.$$

i. Montrer que les nombres $\pm \sin\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)$ pour $k \in \{1, \dots, m\}$ sont des racines réelles de V_{2m}. En examinant la valeur en 0 de V_{2m} et son degré, expliquer pourquoi :

$$V_{2m}(X) = (2m+1) \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{X^2}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)}\right).$$

ii. Admettant cette factorisation, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = (2m+1) \sin\left(\frac{x}{2m+1}\right) \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2m+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)}\right).$$

En déduire que, pour $x \in [0, \pi]$ et $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, on a :

$$\sin x \leq x \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

On pourra utiliser l'Exemple 7.34.

iii. En utilisant la suite de polynômes (P_n) de la section précédente, montrer que, pour $x \in [0, \pi]$ et $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$,

$$\sin x \leq x \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \leq P_{2m+1}(x).$$

On pourra utiliser l'Exemple 7.35.

iv. Conclure.

Annexe D. Notion de PGCD de polynômes

Proposition D.1. *Soient A et $B \in \mathbb{K}[X]$. Il existe $D \in \mathbb{K}[X]$ tel que*

$$\mathbb{K}[X]A + \mathbb{K}[X]B = D\mathbb{K}[X]. \tag{D.1}$$

D est unique à une constante multiplicative près. Le polynôme D satisfaisant (D.1) et de coefficient dominant égal à 1 est noté $A \wedge B$.

Proposition D.2. *Soient A et $B \in \mathbb{K}[X]$. Il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que*

$$A \wedge B = AU + BV.$$

Proposition D.3. *Soient A et $B \in \mathbb{K}[X]$. Alors $A \wedge B$ divise A et B. De plus, tout diviseur commun à A et B divise $A \wedge B$.*

Proposition D.4. *Soient A et $B \in \mathbb{K}[X]$. On note $\mathcal{D}(A, B)$ l'ensemble des diviseurs communs à A et B. On considère un polynôme $P \in \mathcal{D}(A, B)$ de degré maximal et de coefficient dominant 1. Alors $P = A \wedge B$. En particulier, à une constante multiplicative près, $\mathcal{D}(A, B)$ ne possède qu'un élément de degré maximal.*

Démonstration. On a $\deg P \geq \deg (A \wedge B)$ et $A \wedge B$ divise P. Il existe donc $c \in \mathbb{K}$ tel que $P = c(A \wedge B)$. $\square$

Définition D.5. $A \wedge B$ est appelé plus grand commun diviseur (PGCD) de A et B. On dit que A et B sont premiers entre eux lorsque leur PGCD vaut 1 (c'est à dire quand ils ne possèdent pas de diviseur commun autre que les constantes).