Exercice 1

a) X et Y sont indépendantes ssi

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) . f_Y(y) .$$

b) X et Y sont indépendantes ssi

$$\forall t,s \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{(X,Y)}(t,s) = \varphi_X(t) . \varphi_Y(s) .$$

c) Si $U, V \sim \mathcal{N}(0,1)$ sont indépendantes alors $\forall t,s \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{(U,V)}(t,s) = \varphi_U(t)\, \varphi_V(s) = e^{-\frac{t^2}{2}} . e^{-\frac{s^2}{2}} .$$

Ainsi $\varphi_{(X,Y)}(t,s) = \mathbb{E}\left[e^{i[t(U-V)+s(U+V)]}\right]$

$$= \mathbb{E}\left[e^{i(t+s)U + i(s-t)V}\right]$$

$$= e^{-\frac{(t+s)^2}{2}} . e^{-\frac{(s-t)^2}{2}}$$

$$= e^{-t^2} . e^{-s^2} .$$

En faisant $s=0$, puis $t=0$, on obtient

$$\varphi_X(t) = e^{-t^2} , \quad \varphi_Y(s) = e^{-s^2}$$

d) On a $\forall t,s \in \mathbb{R}$ $\varphi_{(X,Y)}(t,s) = \varphi_X(t)\, \varphi_Y(s)$

donc X et Y sont indépendantes.

Exercice 2

a) D'après la formule de transfert, on a

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[g(U)] = \int_0^1 g(u)\,du = I(g)$$

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[g(U)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[g(1-U)]$$

$$= \frac{1}{2} I(g) + \frac{1}{2}\int_0^1 g(1-u)\,du$$

$$\overset{u \to 1-u}{=} \frac{1}{2} I(g) + \frac{1}{2} I(g) = I(g).$$

b) Comme $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$, il suffit de montrer que

$$\mathbb{E}[Y^2] \leq \mathbb{E}[X^2].$$

On a d'une part $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[g^2(U)] = \int_0^1 g^2(u)\,du.$

D'autre part, en développant le carré,

$$\mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{4}\mathbb{E}[g^2(U)] + \frac{1}{4}\mathbb{E}[g^2(1-U)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[g(U)g(1-U)].$$

$$\overset{C\text{-}S}{\leq} \frac{1}{4}\mathbb{E}[g^2(U)] + \frac{1}{4}\mathbb{E}[g^2(1-U)] + \frac{1}{2}\sqrt{\mathbb{E}[g^2(U)]}\sqrt{\mathbb{E}[g^2(1-U)]}$$

$$\overset{u \to 1-u}{=} \mathbb{E}[g^2(U)] = \mathbb{E}[X^2].$$

Exercice 3

a) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_{X_1}(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX_1}\right] = \sum_{k \geq 0} e^{itk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

b) Par indépendance, il vient alors pour $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{\frac{X_1+\dots+X_n}{n}}(t) = \varphi_{X_1+\dots+X_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)^n$$

$$= e^{n\lambda(e^{it/n}-1)}.$$

c) Lorsque n tend vers l'infini, on a

$$e^{it/n} - 1 = \frac{it}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

de sorte que

$$n\lambda(e^{it/n}-1) = i\lambda t + o(1).$$

Ainsi, lorsque n tend vers l'infini, on a $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\infty} \varphi_{\frac{X_1+\dots+X_n}{n}}(t) = e^{i\lambda t},$$

i.e. $\frac{X_1+\dots+X_n}{n} \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L},\,\mathbb{P}} \lambda.$

C'est la loi faible des grands nombres...