Contrôle continu terminal

Durée : 2h00, documents interdits.

Exercice 1 (Autour du cours) *(3 points)*

1. *Donner trois conditions équivalentes qui assurent que deux variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes ?*
2. *Donner trois définitions équivalentes de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires réelles (X_n) vers une variable aléatoire X_∞.*
3. *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telles que X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in [0,1]$.*
   (a) *À quelle condition sur (p_n) la suite (X_n) converge-t-elle en probabilité vers zéro ?*
   (b) *À quelle(s) condition(s) converge-t-elle presque sûrement vers zéro ?*

Exercice 2 (Somme aléatoire et identité de Wald) *(5 points)*
Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère une suite $(X_k)_{k\geq 0}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, ainsi qu'une variable N à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des (X_k). On cherche à étudier la variable aléatoire Z_N définie par

$$Z_N(\omega) := \sum_{k=0}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

On désigne par $\varphi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itX_1}]$ la fonction caractéristique commune des variables (X_n) et $G_N(s) := \mathbb{E}[s^N]$ la fonction génératrice de N.

1. *Montrer que si X_1 et N sont intégrables, Z_N l'est aussi.*
2. *Montrer que la fonction caractéristique φ_{Z_N} de Z_N est la composée $\varphi_{Z_N}(t) = G_N \circ \varphi_X(t)$.*
3. *En déduire l'identité de Wald, i.e. l'équation $\mathbb{E}[Z_N] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N]$.*
4. *On suppose maintenant N suit une loi de Poisson de paramètre λ. On veut montrer que lorsque λ tend vers l'infini, Z_N/N converge en probabilité vers $\mathbb{E}[X_1]$.*
   (a) *Exprimer la fonction caractéristique de Z_N/N en fonction de φ_X.*
   (b) *Montrer que, à t fixé, lorsque k tend vers l'infini, $\varphi_X(t/k)^k$ tend vers $e^{it\mathbb{E}[X_1]}$.*
   (c) *Conclure.*

suite au verso...

Exercice 3 (Théorèmes limite pour des inverses de loi d'uniforme) *(12 points)*
Sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère des variables aléatoires $(U_k)_{k\geq 1}$ dont on suppose qu'elles sont toutes mutuellement indépendantes et de même loi uniforme dans $[-1,1]$. Pour $\alpha \in]0,1]$ et $1 \leq k \leq n$, on pose alors

$$X_k^{(\alpha)} := \frac{U_k}{|U_k|^{1+\alpha}}, \qquad S_n^{(\alpha)} := \sum_{k=1}^{n} X_k^{(\alpha)}.$$

On pourra remarquer que toutes les variables considérées sont symétriques, en particulier leurs fonctions caractéristiques sont réelles.

1. *En fonction de $\alpha \in]0,1]$, expliciter les deux premiers moments $\mathbb{E}[|X_1^{(\alpha)}|]$ et $\mathbb{E}[|X_1^{(\alpha)}|^2]$.*
2. *Montrer que la fonction caractéristique φ de $X_1^{(\alpha)}$ est donnée pour $t \in \mathbb{R}$ par*
$$\varphi(t) = \int_0^1 \cos(t/x^\alpha)dx = \frac{1}{\alpha}\int_1^{+\infty} \frac{\cos(tu)}{u^{1+\frac{1}{\alpha}}}du = \frac{|t|^{1/\alpha}}{\alpha}\int_{|t|}^{+\infty} \frac{\cos(v)}{v^{1+1/\alpha}}dv.$$
3. *Déduire de la question 1) que lorsque $0 < \alpha < 1/2$, φ admet le développement limité suivant au voisinage de zéro :*
$$\varphi(t) = 1 - \frac{t^2}{2(1-2\alpha)}\left(1 + o(1)\right).$$
4. *Via une intégration par parties, déduire de la question 2) que lorsque $1/2 < \alpha \leq 1$, φ admet le développement limité suivant au voisinage de zéro :*
$$\varphi(t) = 1 - c_\alpha |t|^{1/\alpha}\left(1 + o(1)\right),$$
où la constante c_α est donnée par l'expression
$$c_\alpha := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(v)}{v^{1/\alpha}}dv \overset{admis}{=} \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right) > 0.$$
5. *Pour $0 < \alpha < 1$, quelle est la limite presque sûre de $S_n^{(\alpha)}/n$ lorsque n tend vers l'infini ?*
6. *Pour $0 < \alpha < 1/2$, justifier que $\frac{S_n^{(\alpha)}}{\sqrt{n}}$ converge en loi lorsque n tend vers l'infini, vers une variable gaussienne centrée, dont on précisera la variance.*
7. *Pour $1/2 < \alpha \leq 1$, montrer que $\frac{S_n^{(\alpha)}}{n^\alpha}$ converge en loi lorsque n tend vers l'infini, vers une variable aléatoire à densité dont on précisera la fonction caractéristique.*
8. *Lorsque $\alpha = 1$, on rappelle que $c_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(v)}{v}dv = \frac{\pi}{2}$, expliciter la loi limite.*

Questions bonus *(à faire si vous avez traité le reste). On s'intéresse enfin au cas où $\alpha = 1/2$.*

9. *Montrer que dans ce cas, le développement limité de φ au voisinage de zéro est le suivant*
$$\varphi(t) = 1 - t^2 \log(1/|t|)\left(1 + o(1)\right).$$
10. *Montrer qu'alors la suite $\frac{S_n^{(\alpha)}}{\sqrt{n\log(n)}}$ converge en loi lorsque n tend vers l'infini, vers une variable gaussienne centrée, dont on précisera la variance.*