Contrôle terminal

Durée 2h00, aucun document autorisé.

Exercice 1 (Queue gaussienne)
Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, i.e. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

1. *En utilisant une intégration par parties, établir l'équivalent suivant de $\mathbb{P}(X > x)$ lorsque x tend vers l'infini.*
$$\mathbb{P}(X > x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x^2/2}}{x}.$$
2. *Montrer que l'on a en fait le développement asymptotique plus précis suivant*
$$\mathbb{P}(X > x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5} + O\left(\frac{1}{x^7}\right)\right).$$

Exercice 2 (Concentration)

1. *Soit Y une variable aléatoire réelle intégrable telle que $\mathbb{E}[Y] = 0$ et $\mathbb{P}(-1 \leq Y \leq 1) = 1$. Montrer que pour tout $s > 0$, on a alors*
$$e^{sY} \leq \frac{1-Y}{2} e^{-s} + \frac{1+Y}{2} e^{s}.$$
2. *En déduire que*
$$\mathbb{E}\left[e^{sY}\right] \leq \cosh(s) \leq e^{s^2/2}.$$

Soit maintenant $(Y_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telles que $\mathbb{E}[Y_i] = 0$ et $\mathbb{P}(-1 \leq Y_i \leq 1) = 1$ pour tout $i \geq 1$. On pose $S_n := \sum_{i=1}^n Y_i$.

3. *Montrer que pour tout $t > 0$ et $s > 0$, on a*
$$\mathbb{P}(S_n > t) \leq \exp\left(-st + \frac{s^2 n}{2}\right).$$
Indication : on pourra par exemple appliquer l'inégalité de Markov après avoir pris l'exponentielle.
4. *En déduire que pour tout $t > 0$, on a*
$$\mathbb{P}(S_n > t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2n}\right).$$
5. *Établir enfin l'inégalité bilatère*
$$\mathbb{P}(|S_n| > t) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2n}\right).$$
6. *Montrer que pour tout $\alpha > 1/2$, la suite (S_n/n^α) tend presque sûrement vers zéro lorsque n tend vers l'infini.*

Exercice 3 (Un théorème limite central sans variance)
On considère une suite (X_n) de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées, dont la densité commune f, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, est donnée par la formule

$$f(x) = \frac{1}{|x|^3}\mathbb{1}_{|x|>1}.$$

On introduit alors les variables tronquées $Y_n := X_n \mathbb{1}_{|X_n|\leq b_n}$ où $b_n := \sqrt{n}\log(n)$ et on pose

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad \widetilde{S}_n := \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

1. *Déterminer la moyenne et la variance de la variable X_1. Le théorème limite central s'applique-t-il à la suite $S_n/\sqrt{n}$?*
2. *Calculer les moments $\mathbb{E}[Y_n]$, $\mathbb{E}[Y_n^2]$ et $\mathbb{E}[|Y_n|^3]$.*
3. *En déduire les estimés asymptotiques*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\log(n)} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[Y_k^2] = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n\log(n))^{3/2}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[|Y_k|^3] = 0.$$

   Indication : on rappelle les équivalents $\sum_{k=1}^{n} \log(k) \approx n\log(n)$ et $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\log(k) \approx \frac{2}{3}\sqrt{n}^3 \log(n)$.

4. *Montrer que pour n fixé, au voisinage de zéro, on a le développement limité*

$$\left|\varphi_{Y_n}(t) - \left(1 - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}[Y_n^2]\right)\right| \leq Ct^3\mathbb{E}[|Y_n|^3].$$

5. *Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, lorsque n tend vers l'infini, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_{\widetilde{S}_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n\log(n)}}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

   Indication : on pourra utiliser lemme $\left|\prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|$ vu en cours.

6. *Montrer qu'avec probabilité 1, à partir d'un certain rang $n \geq n_0$ (aléatoire), on a en fait l'égalité $Y_n = X_n$.*

   Indication : on rappelle que d'après le critère de Bertrand, la série $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\log(k)^2}$ est convergente.

7. *Conclure que lorsque n tend vers l'infini, la suite $S_n/\sqrt{n\log(n)}$ converge en loi vers une variable aléatoire limite de loi $\mathcal{N}(0,1)$.*