Feuille d'exercices # 3

Exercice 1 *Exemple de loi discrète*
Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs 2, 4, 6, ou 8. Déterminer la loi de X sachant que :

$$\mathbb{P}(X < 6) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X > 6) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 4).$$

Exercice 2 *Motus*
Une urne contient des boules numérotées : 7 boules sont marquées du chiffre 1, 5 boules sont marquées du chiffre 3 et 3 boules sont marquées du chiffre 5. On tire au hasard une boule de l'urne et on note X sa marque.

1. Déterminer la loi de la variable X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 3 *Dé truqué*
Une variable aléatoire X prend les valeurs entières $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, avec probabilité proportionnelle à k i.e. il existe une réel $\alpha > 0$, tel que $\mathbb{P}(X = k) = \alpha k$.

1. Préciser la loi de X. Calculer son espérance.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 4 *Nombre de piles*
On lance trois pièces équilibrées. On désigne par X le nombre de piles obtenus.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer la moyenne et la variance de X.

Exercice 5 *Tu joues ou bien ?*
On vous propose le jeu suivant. Pour pouvoir jouer, il faut d'abord verser 1 euro. On jette deux dés simultanément. Si l'un des dés au moins présente un chiffre impair, on ne gagne rien. Si les dés présentent deux chiffres pairs différents, on gagne 1 euro. Enfin, si les dés présentent deux fois le même chiffre pair, on gagne une somme égale à la somme de ces deux chiffres, par exemple on gagne 8 si on fait un double quatre. Joueriez-vous à ce jeu ?

Exercice 6 *Génotype*
Considérons deux parents hétérozygotes de génotype Aa tels que leur enfants peuvent avoir les génotypes AA, Aa ou aa avec probabilité

$$\mathbb{P}(AA) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(Aa) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(aa) = \frac{1}{4}.$$

Supposons qu'ils aient 4 enfants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement l'un deux ait le génotype aa ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un deux ait le génotype aa ?

Exercice 7 *Génotype, suite*
Considérons les enfants de parents hétérozygotes de génotype Aa. La distribution des enfants est celle de l'exercice précédent. On choisit de façon aléatoire 240 de ces enfants. On définit N_1, N_2, N_3 le nombre d'enfants de génotype AA, Aa et aa respectivement.

1. Quelle est la loi de N_1 ? N_2 ? N_3 ?
2. Quel est le lien entre ces différentes variables ? Vérifier que pour $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(N_1 = k_1, N_2 = k_2, N_3 = k_3) \neq \mathbb{P}(N_1 = k_1)\mathbb{P}(N_2 = k_2)\mathbb{P}(N_3 = k_3).$$

Exercice 8 *Moments des lois usuelles*
Déterminer les espérances et les variances des lois usuelles (Cf. pages 27 et 37 du polycopié).

Exercice 9 *Somme de variables de Bernoulli*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

1. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$. En déduire la loi de $X_1 + \ldots + X_n$.
2. Interpréter ce résultat en terme de jeu de pile ou face.

Exercice 10 *Somme de variables de Poisson*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de, où X_j suit une loi de Poisson paramètre λ_j.

1. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$. En déduire la loi de $X_1 + \ldots + X_n$.
2. Expliciter la loi de X_j sachant $X_1 + \ldots + X_n = k$.

Exercice 11 *Passe-partout*
Un trousseau de n clefs contient une seule clef ouvrant une serrure donnée. On les essaie l'une après l'autre au hasard. Calculer la loi, l'espérance et la variance du nombre d'essais nécessaires. Même question si, un peu éméché, on réessaie à chaque fois une clef au hasard sans avoir écarté la précédente.

Exercice 12 *Ciel gris*
Dans un pays très pluvieux, il pleut un jour donné avec probabilité 1 s'il n'a pas plu la veille, et avec probabilité 1/2 s'il a plu la veille. Montrez qu'il y a en moyenne 243 jours de pluie par an.

Exercice 13 *Exemple de variable à densité*
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4}{3}(1-x)^{1/3}$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition de X et la tracer.
3. Calculer l'espérance de X.

Exercice 14 *Maximum et minimum*
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note F leur fonction de répartition commune. On note $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $Z = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1. Exprimer les fonctions de répartition F_Y et F_Z des variables Y et Z en fonction de F ;
2. Expliciter F_Y et F_Z lorsque les X_i sont des variables de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$;
3. Expliciter la densité des Y et Z lorsque les X_i sont des variables de loi uniforme $U_{[0,1]}$.