Université de Rennes I
Préparation à l'agrégation
compléments d'analyse

(Notes rédigées par J.-P. Conze)

Etude de la régularité de fonctions

Exemples de fonctions non dérivables (fonctions de Weierstrass)

1. Introduction

Nous donnons un exemple d'étude de la régularité d'une fonction à partir de sa représentation dans une base, ici en série de Fourier. Nous verrons que l'on peut ainsi traiter le cas de fonctions à séries de Fourier lacunaires, dont la fonction de Weierstrass est le prototype, alors que l'étude de fonctions moins lacunaires, telles que la fonction de Riemann, nécessite d'autres méthodes, par exemple l'usage de bases d'ondelettes. La méthode d'estimation de la régularité pour une série lacunaire est reprise du livre de Zuily et Queffelec cité en référence.

Fonctions de Riemann et Weierstrass

Deux types de fonctions célèbres dans l'histoire de l'analyse fournissent des exemples de fonctions non dérivables :

- la fonction de Riemann :

$$R(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \sin n^2 x,$$

- la fonction de Weierstrass :

$$W(x) = \sum_0^\infty \lambda^n \cos(2\pi a^n \pi x),$$

avec $0 < \lambda < 1$ et a rél > 0.

La fonction R, proposée par Riemann comme exemple de fonction nulle part dérivable, n'est pas dérivable pour $\frac{x}{\pi}$ irrationnel (Hardy, 1916). Par contre, elle est dérivable pour $x = \pi$ comme l'a montré J. Gerver en 1970 (The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of π, Amer. J. Math. 92, 33-55, 1970), et on a $R'(\pi) = -\frac{1}{2}$.

L'étude de la régularité de la fonction de Riemann a été reprise récemment par Y. Meyer, Jaffard, Holschneider, Tchamitchian, à l'aide notamment de méthodes d'ondelettes.

Les fonctions de Weierstrass W, elles, ne sont dérivables en aucun point, sous la condition $ab > 1$. Une preuve en a été donnée par Weierstrass (1875) sous des hypothèses particulières, puis étendue successivement par plusieurs auteurs (Bromwich,...) jusqu'à Hardy (1915), qui a établi les résultats suivants :

1) Pour a réel tel que $\lambda a \geq 1$, la fonction W n'a de dérivée finie en aucun point.

2) Soit $\alpha = \frac{-\log(\lambda)}{\log a}$. La fonction W vérifie :

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) = & O(|h|^\alpha), \ \ si\ \alpha < 1 \\ & O(|h| \log |h|), \ \ si\ \alpha = 1. \end{aligned}$$

3) Pour $\alpha < 1$, pour tout x, W ne satisfait pas à $f(x+h) - f(x) = o(|h|^\alpha)$.

Signalons également les travaux de Salem, Zygmund, Young, et les résultats de Michel Bruneau (Sur les fonctions non dérivables de Weierstrass, Bull. Soc. Math. France, 105 (1977), p. 337-347).

2. Rappels

(2.1) Régularité höldérienne

Pour ce qui suit, rappelons que f est **höldérienne** d'exposant α, pour un $\alpha \in]0, 1]$, s'il existe une constante C telle que

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^\alpha, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pour définir une régularité d'ordre supérieur, on écrit $f(x) = P(x) + r(x)$, où P est un polynôme, et on estime la régularité de r.

Soit (ϕ_n) une identité approchée. Si f est une fonction höldérienne, on peut préciser la vitesse à laquelle la suite $(f * \phi_n)$ converge vers f, pourvu que l'on puisse majorer les "moments" de ϕ_n, i.e. les intégrales $\int |t|^\alpha J_N(t)\ dt$. En effet, on a, en un point où f est α-höldérienne, la majoration :

$$|(f * \phi_n)(t_0) - f(t_0)| \leq \int |f(t-s) - f(t_0)| \phi_n(s)\ ds \leq C \int |s|^\alpha\ \phi_n(s)\ ds.$$

Nous en verrons l'application au noyau de Fejer.

(2.2) Noyaux associés aux développements en série de Fourier

Notons $\mathcal{P}_N = \{\sum_{-N}^{N} c_k e_k\}$ l'espace des polynômes trigonométriques d'ordre au plus N, $S_N(f)(t)$ la somme partielle d'ordre N de la série de Fourier de f, et $\sigma_N(f)$ leur moyenne de Césaro.

On rappelle que le **noyau de Fejer** d'ordre $N \geq 1$, F_N, est le polynôme trigonométrique d'ordre $N-1$, moyenne des noyaux de Dirichlet d'ordre $< N$:

$$F_N = \frac{1}{N}(D_0 + ... + D_{N-1})$$

et qu'on a pour F_N l'expression suivante :

$$F_N(t) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} (1 - \frac{|n|}{N}) e^{2\pi int} = \frac{1}{N}(\frac{\sin N\pi t}{\sin \pi t})^2. \tag{2.2.1}$$

La suite $(F_N)_{N\geq 1}$ vérifie des conditions d'identité approchée : $J_N \geq 0$, $\|J_N\|_1 = 1$ et

$$\lim_N \int_{\delta<|t|\leq \frac{1}{2}} F_N(t)\ dt = 0, \forall \delta \in]0, \frac{1}{2}].$$

La convolution par le noyau de Fejer d'ordre N d'une fonction f de coefficients de Fourier $(c_n(f)_{n\in \mathbb{Z}}$ s'écrit :

$$\sigma_N(f)(t) = f * F_N(t) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} (1 - \frac{|n|}{N})\ c_n(f)\ e^{2\pi int}.$$

C'est la moyenne des sommes partielles de la série de Fourier de f. Dans certaines questions, il est nécessaire d'utiliser un noyau "plus concentré à l'origine".

On définit le **noyau de Jackson** J_N d'ordre $N \geq 1$ par

$$J_N = \|F_N\|_2^{-2} F_N^2. \tag{2.2.2}$$

Il est clair que J_N est un polynôme trigonométrique dans $\mathcal{P}_{2N-2}$ qui, d'après (1.1), s'écrit

$$J_N(t) = \|F_N\|_2^{-2} \frac{1}{N^2} (\frac{\sin N\pi t}{\sin \pi t})^4.$$

On notera $j_N(r), r = -2N+2, ..., 2N-2$, les coefficients de Fourier du polynôme trigonométrique J_N. Les autres coefficients de J_N sont nuls et on a

$$J_N(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} J_N(t)\ dt = 1.$$

(2.3) Lemme : *a) Pour $\gamma \in [0,1[$, il existe une constante finie C_γ telle que*

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |t|^\gamma \ F_N(t) \ dt \le C_\gamma N^{-\gamma}, \ \forall N \ge 1. \tag{2.3.1}$$

Pour $\gamma = 1$, nous avons :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |t| \ F_N(t) \ dt \le C_1 N^{-\gamma} \ \log N, \ \forall N \ge 2. \tag{2.3.2}$$

b) Pour $\gamma \in [0,3[$, il existe une constante C_γ finie telle que

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |t|^\gamma \ J_N(t) \ dt \le C_\gamma N^{-\gamma}, \ \forall N \ge 1. \tag{2.3.3}$$

Preuve : On utilise les inégalités classiques :

$$\frac{2}{\pi} t \le \sin t \le t, \ \forall t \in [0, \pi/2]. \tag{2.3.4}$$

a) Nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} |t|^\gamma F_N(t) \ dt &= \frac{1}{N} \int_0^{\frac{1}{2}} |t|^\gamma \ (\frac{\sin N\pi t}{\sin \pi t})^2 \ dt \\
&\le \frac{1}{4N} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\sin N\pi t)^2}{t^{2-\gamma}} \ dt \\
&= \frac{1}{N^\gamma} \frac{1}{2} \int_0^{N/2} \frac{(\sin \pi t)^2}{t^{2-\gamma}} \ dt \\
&= \frac{C_\gamma}{N^\gamma},
\end{aligned}$$

où C_γ est une constante finie si $-1 < \gamma < 1$.

b) Regardons maintenant le noyau de Jackson. Montrons d'abord qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|F_N^2\|_1 \ge cN$. On a, pour $N \ge 1$,

$$\begin{aligned}
\|F_N^2\|_1 = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} F_N^2 \ dt &= \frac{2}{N^2} \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{\sin N\pi t}{\sin \pi t})^4 \ dt \\
&\ge \frac{2}{N^2} \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{\sin N\pi t}{\pi t})^4 \ dt \\
&= \frac{2N}{\pi} \int_0^{\pi N/2} (\frac{\sin t}{t})^4 \ dt \ge \frac{2N}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\frac{\sin t}{t})^4 \ dt;
\end{aligned}$$

d'où $\|F_N^2\|_1 \geq cN$, avec $c = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\frac{\sin t}{t})^4\, dt > 0$, pour $N \geq 1$.

Notons une autre méthode pour évaluer $\|F_N^2\|_1$: le terme constant dans le polynome trigonométrique F_N^2 est $\sum_{-N+1}^{N-1}(1-\frac{|k|}{N})^2$. Par intégration, les autres termes donnent 0. On a donc :

$$\frac{1}{N}\|F_N^2\|_1 = \frac{1}{N}\sum_{-N+1}^{N-1}(1-\frac{|k|}{N})^2.$$

Cette quantité tend vers 4/3, quand N tend vers $+\infty$ (utiliser l'expression de la somme des carrés des N premiers entiers ou une somme de Riemann de la fonction $1-x^2$ sur $[-1,1]$.

c) Pour montrer (3), il suffit donc de majorer

$$\frac{N^\gamma}{N^3}\int_0^{\frac{1}{2}} t^\gamma(\frac{\sin N\pi t}{\sin \pi t})^4\, dt.$$

En utilisant (4), on a, pour des constantes C, C', C'' les majorations :

$$\begin{aligned}\frac{N^\gamma}{N^3}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |t|^\gamma(\frac{\sin N\pi t}{\sin \pi t})^4\, dt &\leq CN^{-3+\gamma}\int_0^{\frac{1}{2}} t^\gamma(\frac{\sin N\pi t}{\sin \pi t})^4\, dt \\ &\leq C'N^{-3+\gamma}\int_0^{\frac{1}{2}} t^\gamma(\frac{\sin N\pi t}{\pi t})^4\, dt \\ &\leq C''\int_0^{\infty}\frac{(\sin t)^4}{t^{4-\gamma}}\, dt.\end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est finie pour $-1 < \gamma < 3$.

□

3. Coefficients de Fourier et régularité

(3.1) Considérons maintenant une fonction f 1-périodique intégrable sur $[0,1]$. Soit $c_n(f) = c_n$ ses coefficients de Fourier (noter qu'il n'est pas nécessaire dans cette étude que f soit la somme de sa série de Fourier).

Pour $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, $\alpha \in]0,1]$ et $t_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, introduisons la quantité suivante :

cas (1) ($\alpha \leq 1$) :

$$\theta_\alpha(\delta, t_0) = \sup_{|t-t_0|\leq\delta}\frac{|f(t)-f(t_0)|}{|t-t_0|^\alpha},$$

cas (2) (f dérivable en t_0)

$$\theta_1(\delta, t_0) = \sup_{|t-t_0|\leq\delta}\frac{|f(t)-f(t_0)-(t-t_0)f'(t_0)|}{|t-t_0|}.$$

Si f est höldérienne en t_0, $\theta_\alpha(\delta, t_0)$ est borné ; si f dérivable en t_0, on a : $\lim_{\delta\to 0}\theta_1(\delta, t_0) = 0$.

Notons que l'on peut toujours se ramener à
$t_0 = 0$ et $f(t_0) = 0$ dans le cas (1)
$t_0 = 0$, $f(t_0) = 0$, $f'(t_0) = 0$ dans le cas (2),
en modifiant les premiers coefficients de Fourier de f et sans changer le module des autres coefficients de Fourier de f.

En effet, il suffit de remplacer f dans le cas (1) par la fonction

$$t \to f(t + t_0) - f(t_0),$$

et dans le cas (2) par la fonction

$$t \to f(t + t_0) - f(t_0) - \frac{f'(t_0)}{2\pi i}(e^{2\pi it} - e^{2\pi it_0}).$$

En notant simplement $\theta_\alpha(\delta) = \theta_\alpha(\delta, 0)$, on a donc (cas (1) et cas (2)) pour la fonction f modifiée :

$$|f(t)| \leq \theta_\alpha(\delta)\ |t|^\alpha,\ \forall t \in [-\delta, \delta],\ 0 < \delta \leq \frac{1}{2},$$

avec
$\theta_\alpha(\delta)$ borné, si f est α-höldérienne en 0,
$\theta_\alpha(\delta) \to 0$, si f est dérivable en 0.

On a la majoration suivante dans laquelle (C_1 et C_2 sont deux constantes données par (3)) :

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(t)|\ J_p(t)\ dt &\leq \int_{|t|\leq\delta} |f(t)|\ J_p(t)\ dt + \int_{\delta<|t|\leq\frac{1}{2}} |f(t)|\ J_p(t)\ dt \\
&\leq \theta_\alpha(\delta) \int_{|t|\leq\delta} |t|^\alpha\ J_p(t)\ dt + \|f\|_\infty \frac{1}{\delta^2} \int_{\delta\leq|t|\leq\frac{1}{2}} |t|^2 J_p(t)\ dt \\
&\leq \theta_\alpha(\delta) \int_{|t|\leq\frac{1}{2}} |t|^\alpha\ J_p(t)\ dt + \|f\|_\infty \frac{1}{\delta^2} \int_{|t|\leq\frac{1}{2}} |t|^2\ J_p(t)\ dt \\
&\leq C_1\theta_\alpha(\delta)p^{-\alpha} + C_2\|f\|_\infty \frac{1}{\delta^2 p^2}.
\end{aligned}$$

On a :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)J_p(t)e^{-2\pi ikt}\ dt = \sum_r c_{k+r}j_p(r) = \sum_{|r|<2p} c_{k+r}j_p(r), \tag{2.3.5}$$

puisque J_p a ses coefficients nuls pour $|r| \geq 2p$.

Soit (k_n) la suite croissante des indices des coefficients non nuls de f : $0 \leq k_0 < k_1 < ... < k_{n-1} < k_n < k_{n+1} < ...$ et notons $a_n = c_{k_n}$. (On raisonnerait de même pour les indices négatifs.)

Posons $\gamma_n = \min\{k_n - k_{n-1}, k_{n+1} - k_n\}$.

Il résulte de (2.3.5) que

$$(2p \leq \gamma_n) \Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) J_p(t) e^{-2\pi i k_n t}\, dt = c_{k_n}\, j_p(0) = a_n. \tag{2.3.6}$$

En appliquant cette relation au noyau de Jackson d'ordre $[\gamma_n]$, on en déduit :

$$[\gamma_n]^\alpha |a_n| \leq C_1 \theta_\alpha(\delta) + C_2 \|f\|_\infty \frac{1}{\delta^2} [\gamma_n]^{-2+\alpha}. \tag{2.3.7}$$

(3.2) Proposition : *Pour toute sous-suite (n_j), telle que $\lim_j \gamma_{n_j} = \infty$, on a, pour tout $t_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$:*

$$\limsup_{j \to \infty} \gamma_{n_j}^\alpha |a_{n_j}| \leq C_1 \liminf_{\delta \to 0} \theta_\alpha(\delta, t_0).$$

Preuve : On obtient le résultat en passant à la limite d'abord sur n_j, puis quand $\delta \to 0$.

Le raisonnement précédent a été fait pour $t_0 = 0$, mais nous avons vu plus haut que l'on pouvait s'y ramener, sans changer le module des coefficients de Fourier. Le résultat est donc vérifié pour un t_0 quelconque.

□

On notera que pour étudier la régularité höldérienne, il suffit d'utiliser le noyau de Fejer.

(3.3) Applications

a) Séries lacunaires

Soit $f(t) = \sum_n a_n e^{2\pi i k_n}$, avec $\sum_n |a_n| < \infty$. On suppose que $(k_n)_{n \geq 1}$ est une suite lacunaire d'entiers, c'est-à-dire telle qu'il existe un réel $\rho > 1$ tel que

$$k_{n+1} \geq \rho k_n, \; \forall n \geq 1.$$

Posons $p_n = [(1 - \rho^{-1}) k_n / 2] - 1$. Il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on ait $p_n \geq 1$. Dans ce cas, la relation (6) est réalisée :

$$a_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) J_{p_n}(t) e^{-2\pi i k_n t}\, dt.$$

On ne peut donc avoir $|f(t)| \leq C|t|,\ ,\forall t \in [-\delta, \delta]$, pour un $\delta > 0$, et une constante C.

En particulier, ceci s'applique à la fonction de Weierstrass définie par

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} a^n \cos(b^n \pi t),$$

où $|a| < 1$ et b est un entier ≥ 2.

Soit α défini par $ab^\alpha = 1$, i.e. $\alpha = -\dfrac{\ln a}{\ln b} \in]0, 1[$.

On montre facilement que la fonction f est au moins höldérienne d'ordre α en tout point.

Les résultats précédents montre qu'elle est exactement höldérienne d'ordre α. En effet, pour qu'elle soit höldérienne d'ordre α', il faut que la quantité $(b^{n+1} - b^n)^{\alpha'} = (b-1)^{\alpha'}(ab^{\alpha'})^n$ soit majorée, ce qui impose $\alpha' \leq \alpha$.

En particulier, elle n'est dérivable en aucun point.

b) Cas de la fonction de Riemann

La fonction définie par $f(t) = \sum_{n>0} \frac{1}{n^2} \sin(n^3 \pi t)$ n'est nulle part dérivable.

Par contre, on ne peut pas appliquer la méthode précédente à la fonction de Riemann $f(t) = \sum_{n>0} \frac{1}{n^2} \sin(n^2 \pi t)$.

Référence :
Zuily C.), Queffelec (H.) : *Analyse pour l'agrégation* (Masson)