Université de Rennes I
Préparation à l'agrégation (compléments d'analyse)

(Notes rédigées par J.-P. Conze)

Bases dans un espace normé

Table des matières

1 Bases algébriques et bases topologiques

(1.1) En dimension finie, toute base algébrique d'un espace vectoriel E permet de représenter les vecteurs de E, et de façon unique, comme une combinaison linéaire des vecteurs formant la base. On est, d'autre part, assuré de l'existence de ces bases algébriques. En dimension infinie, on peut également montrer le théorème d'existence de bases algébriques en utilisant le lemme de Zorn et l'on dispose donc du même résultat de représentation : tout vecteur de l'espace s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire finie de vecteurs de la base. Mais si la dimension de l'espace est infinie, les bases algébriques sont généralement non dénombrables.

On montre, comme application du théorème de Baire, le résultat suivant : *Si* $(E, \| \ \|)$ *est un espace de Banach possédant une base (au sens algébrique) dénombrable, alors* E *est de dimension finie.*

Par exemple, sur l'espace $\mathcal{P}$ des polynômes en une variable à coefficients réels, il n'y a pas de norme complète (En effet $\mathcal{P}$ est la réunion dénombrable des ensembles $\mathcal{P}_k$ (fermés pour toute norme, car de dimension finie) formés des polynômes de degré k, k entier ≥ 0. Or chaque $\mathcal{P}_k$ est d'intérieur vide, ce qui interdit l'existence d'une norme complète sur l'espace vectoriel de polynômes, d'après le théorème de Baire.

On remarque également qu'il n'est pas possible, en général (sauf exception, comme par exemple dans le cas de l'espace vectoriel des polynômes), d'expliciter des bases (au sens algébrique) sous une forme conduisant à des calculs réalisables.

Il est donc préférable de changer de point de vue, en considèrant des espaces vectoriels normés et des systèmes de vecteurs formant une base dans un sens *topologique*. La notion de base devient alors une notion d'analyse, qui nécessite l'usage de passages à la limite (convergence de séries). La représentation des vecteurs sous forme de séries fait intervenir une infinité de vecteurs de base, mais dans le cas des espaces normés *séparables* (i.e. possédant un sous-ensemble dénombrable dense), où nous allons nous placer, la base elle-même est une famille dénombrable, et il est souvent possible d'expliciter des bases topologiques permettant les calculs numériques.

Ceci nous conduit à préciser la notion même de base, à étudier leur (plus ou moins bonnes) propriétés et à poser le problème de leur existence. Existence et propriétés sont liées aux propriétés géométriques des espaces normés envisagés.

• Quelques définitions

(1.2) Soit $E, \| \ \|)$ un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) normé.

Notons $vect(e_j, j \in J)$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs d'une famille $(e_j)_{j\in J}$, J étant un ensemble d'indices, et $\overline{vect}(e_j, j \in J)$ sa fermeture au sens de la norme $\| \ \|$.

Une famille $(e_i, i \in I)$, où I est ensemble d'indices, de vecteurs de $(E, \| \ \|)$ est appelée **base topologique** de $(E, \| \ \|)$, si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1) la famille est **totale** dans $(E, \| \ \|)$, i.e. tout vecteur de E est limite en norme de combinaisons linéaires finies de vecteurs pris dans le système (e_i) (on a donc $E = \overline{vect}(e_j, j \in J)$) ;

2) le système (e_i) est **topologiquement libre** : i.e. pour tout indice $j \in I$,

$$e_j \notin \overline{vect}(e_i, i \in I, i \notin j).$$

Contrairement aux bases algébriques, l'existence de bases topologiques n'est pas assurée. La raison en est que la réunion d'une famille croissante de systèmes topologiquement libres peut ne pas l'être, comme le montre l'exemple suivant :

Dans $(\ell_\infty(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$ considérons les vecteurs : $e_0 = (1, 1, \cdots, 1, \cdots)$, $e_n = e_0 + (0, 0, \cdots, 0, 1/n, 0, \cdots)$, $n \geq 1$.

Les familles $(e_0, \cdots, e_n)$ sont libres, pour tout $n \geq 1$, mais on a $\lim_n \|e_n - e_0\| = 0$.

L'argument du lemme de Zorn appliqué à des systèmes libres ordonnés par inclusion, utilisé pour construire les bases algébriques, ne s'applique donc pas dans le cadre topologique.

En renforçant la notion de base topologique, on est conduit à la définition suivante :

(1.3) Définition : Etant donné un espace vectoriel normé $(E, \| \, \|)$, on appelle **base de Schauder** toute suite $(e_k)_{k \geq 1}$ de vecteurs de E ayant la propriété suivante :

pour tout vecteur $x \in E$, il existe une suite unique de coefficients $(a_k(x))$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} \|x - \sum_1^n a_k(x) e_k\| = 0. \tag{1}$$

(1.4) Remarques :

1) S'il existe dans $(E, \| \, \|)$ une base de Schauder, alors $(E, \| \, \|)$ est séparable.

On notera que les espaces rencontrés (dans les situations classiques d'analyse) sont souvent séparables. Mais il y a des exceptions. Par exemple l'espace des suites bornées muni de la norme uniforme $(\ell_\infty(\mathbb{N}), \| \, \|_\infty)$ n'est pas séparable.

2) L'ordre dans lequel sont énumérés les vecteurs de la base doit être précisé. En particulier, les systèmes de vecteurs obtenus en permutant les vecteurs d'une base de Schauder ne forment plus nécessairement une base de Schauder.

3) L'unicité des coefficients $a_n(x)$, pour un vecteur x donné, montre que les applications $x \to a_n(x)$ définissent des formes linéaires sur E.

Cette unicité assure que l'on a les relations

$$a_n(e_k) = \delta_{k,n}, \ \forall n, k \geq 1,$$

où $\delta_{k,n} = 1$, pour $k = n$, et $= 0$, pour $k \neq n$.

A une base de Schauder on peut donc associer la suite des applications linéaires (de rang fini) P_n, $n \geq 1$, définies par

$$P_n x = \sum_1^n a_k(x) e_k.$$

L'unicité des développements montre que les P_n forme une famille de projecteurs vérifiant :

$$P_m \circ P_n = P_n \circ P_m = P_n, \ \text{si } m \geq n. \tag{2}$$

L'existence d'une base de Schauder est équivalente à la donnée d'une suite de sous-espaces de dimension finie (E_n) et d'une suite de projecteurs (P_n), $P_n : E \to E_n$ vérifiant (2) et tels que

$$\lim_n \|x - P_n x\| = 0, \ \forall x \in E.$$

On peut supposer en effet que $dim(E_{n+1}) = dim(E_n) + 1$ et il est possible de construire par récurrence une suite de vecteurs $(e_k)_{k \geq 1}$ telle que la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ soit une base de E_n telle que $P_n(x) = \sum_1^n a_k(x)e_k$. La famille $(e_k)_{k\geq 1}$ est alors une base de Schauder de $(E, \| \|)$.

Une base algébrique dans un espace de dimension finie est évidement une base dans le sens de la définition précédente. Les bases orthonormées dans les espaces de Hilbert forment une classe particulièrement importante de base de Schauder. Nous rappelerons le principe de leur construction. Nous donnerons également d'autres exemples de bases de Schauder en dimension infinie.

Notons que le problème de l'existence d'une base de Schauder dans un espace de Banach séparable, posé depuis Banach, a été résolu par la négative en 1972 par Enflo.

2 Propriétés des bases de Schauder

(2.1) Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. Dans la suite, nous dirons simplement **base** pour désigner une base de Schauder de l'espace. Soit $(e_k)_{k\geq 1}$ une base dans cet espace.

Pour chaque $x \in E$, la suite $(\| \sum_1^n a_k(x)e_k\|,\ n \geq 1)$ est bornée, puisqu'elle converge en norme. Posons

$$|||x||| = \sup_{n\geq 1} \| \sum_1^n a_k(x)e_k\| = \lim_n \sup_{1\leq m\leq n} \|P_m x\|. \tag{3}$$

Il est clair que $|||.|||$ est une semi-norme sur E et la relation

$$\|x\| = \lim_n \| \sum_1^n a_k(x)e_k\|$$

implique l'inégalité

$$\|x\| \leq |||x|||,\ \forall x \in E,$$

ce qui assure que $|||.|||$ est une norme.

Montrons que les normes $\| \|$ et $||| \ |||$ sont équivalentes, si l'espace est complet.

(2.2) Proposition : *Si $(E, \| \|)$ est un espace de Banach et $(e_k)_{k\geq 1}$ une base dans cet espace, la norme $||| \ |||$ définie par (3) est équivalente à $\| \|$: il existe une constante K telle que*

$$\| \sum_1^n a_k(x)e_k\| \leq K\|x\|,\ \forall n \geq 1.$$

Preuve : D'après un corollaire du théorème de l'application ouverte, il suffit de montrer que $||| \ |||$ est une norme d'espace de Banach. Soit (x_k) une suite de Cauchy pour cette norme $||| \ |||$.

Soit $\varepsilon > 0$. La condition de Cauchy pour la norme $||| \ |||$ implique qu'il existe $K(\varepsilon)$ tel que

$$\|P_n x_k - P_n x_{k'}\| \leq \varepsilon,\ \forall k, k' \geq K(\varepsilon),\ \forall n \geq 1. \tag{4}$$

Pour n fixé, la suite $(P_n x_k)_{k\geq 1}$ est de Cauchy et donc convergente. Soit y_n la limite. Comme les applications linéaires en dimension finie sont continues, on a $P_m x_k = P_m(P_n x_k) \to P_m y_n$, pour $m \leq n$; d'où $P_m y_n = y_m$, pour $m \leq n$. On peut donc écrire y_n sous la forme : $y_n = \sum_1^n b_k e_k$.

En passant à la limite en k' dans (4), on obtient :

$$\|P_n x_k - y_n\| \leq \varepsilon, \forall n, \forall k \geq K(\varepsilon). \tag{5}$$

La suite (y_n) est également une suite de Cauchy. En effet, pour un k fixé $\geq K(\varepsilon)$, pour n et m assez grands, nous avons $\|P_n x_k - P_m x_k\| < \varepsilon$ et donc :

$$\|y_n - y_m\| \leq \|y_n - P_n x_k\| + \|P_n x_k - P_m x_k\| + \|P_m x_k - y_m\| \leq 3\varepsilon.$$

Posons $x = \lim_n y_n = \sum_1^\infty b_k e_k$. On a $y_n = P_n x$. D'après (5), on obtient, pour tout n et tout $k \geq K(\varepsilon)$:

$$\|P_n x_k - P_n x\| = \|P_n x_k - y_n\| \leq \varepsilon;$$

d'où : $|||x_k - x||| \leq \varepsilon$.

□

Il en résulte que, pour un espace de Banach $(E, \|\ \|)$, la suite des projections (P_n) est uniformément bornée : d'après la proposition, il existe K tel que

$$\|P_n x\| \leq K\|x\|,\ \forall n \geq 1.$$

Ceci implique en particulier qu'une base de Schauder dans un espace de Banach est une base topologique.

Une base est dite **monotone** si $\|P_n\| = 1,\ \forall n \geq 1$ (la constante K de la proposition (2.2) vaut 1).

La proposition suivante donne une caractérisation des bases (de Schauder), utile dans les exemples.

(2.3) Proposition : *Une suite $(e_n)_{n\geq 1}$ de vecteurs non nuls dans un espace de Banach $(E, \|\ \|)$ est une base de Schauder si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

i) il existe une constante K telle que

$$\|\sum_1^n a_i e_i\| \leq K\ \|\sum_1^m a_i e_i\|,\ \forall \textit{ les scalaires } a_i, \forall n < m;$$

ii) $\overline{vect}(\{e_n, n \geq 1\}) = E$.

Preuve : Notons d'abord que la suite des normes $(|||P_n x|||)_{n\geq 1}$ est croissante, d'après :

$$|||P_n x||| = \sup_k \|P_k P_n x\| = \sup_{1\leq k\leq n} \|P_k x\|.$$

Si (e_n) est une base, la proposition (2.2) implique, pour $n \leq m$,

$$\|P_n x\| = \|P_n P_m x\| \leq |||P_m x||| \leq K\|P_m\|.$$

Inversement, la condition $i)$ implique que le sous-espace de E formé des vecteurs x ayant un dévelopement donné par une série convergente de la forme $\sum_i a_i e_i$ est fermé.

Il contient l'ensemble des combinaisons linéaires finies de vecteurs e_i qui est dense d'après la condition $ii)$. Ce sous-espace coïncide donc avec E.

□

Propriété de dualité

(2.4) Les applications coordonnées $e_n^* : x \in E \to a_n(x) \in \mathbb{C}$ sont linéaires, continues, d'après la proposition (2.2), donc définissent des éléments du dual de $(E, \| \ \|)$. Le système $(\{e_n, e_n^*\})_{n\geq 0}$ est bi-orthogonal (i.e. $e_m^*(e_n) = \delta_{n,m}$).

Si $(E, \| \ \|)$ est un espace réflexif, le système $(e_n^*)_{n\geq 0}$ forme une base dans E^*, appelée base duale de $(e_n)_{n\geq 0}$.

Tout élément $\phi \in E^*$ peut s'écrire $\phi = \sum_k \phi(e_k)e_k^*$, la convergence de la série ayant lieu pour la topologie faible :

$$|\phi(x) - \phi(\sum_1^n a_k(x)e_k)| = |\phi(x) - \sum_1^n \phi(e_k)e_k^*(x)| \leq \|x - \sum_1^n a_k(x)e_k\| \ \|\phi\| \to 0.$$

Nous allons maintenant donner des exemples de bases de Schauder, en commençant par l'exemple le plus simple et le plus important, celui des bases hilbertiennes.

3 Bases hilbertiennes

(3.1) Une propriété fondamentale des espaces de Hilbert (ou simplement pré-hilbertiens) est l'existence de bases hilbertiennes. Rappelons brièvement leurs propriétés et leur construction.

Soit V un espace pré-hilbertien muni d'un produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$ et de la norme associée au produit scalaire.

• Orthogonalité et systèmes orthonormés

Deux vecteurs x, y de V sont dits **orthogonaux** si $\langle x, y\rangle = 0$. Si $V_0 \subset V$ est une partie de V, on appelle **orthogonal** de V_0 l'ensemble

$$V_0^\perp = \{y : \langle x, y\rangle = 0, \forall x \in V_0\}.$$

Il est clair que si V_0 et V_1 sont orthogonaux, on a $V_0 \bigcap V_1 = \{0\}$ et que $V_0^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de V.

(3.2) Définitions : On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs dans V forme un système **orthogonal** si

$$\langle u_i, u_j\rangle = 0, \forall i \neq j.$$

Si, de plus, la famille vérifie $\|u_i\| = 1, \forall i \in I$, le système est dit **orthonormé**.

(3.3) Lemme : (Pythagore!) *Si $(u_1, \cdots, u_n)$ est un système orthonormé fini, pour tout $x = \sum_1^n \alpha_i u_i$ dans l'espace engendré, on a $\|x\|^2 = \sum_1^n |\alpha_i|^2$ et $\alpha_i = \langle x, u_i\rangle$.*

Preuve : Développer le carré de la norme de x.

□

Une conséquence de ce lemme élémentaire est qu'un système orthonormé est une famille libre : si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille orthonormée, toute relation de la forme $\sum_{i\in J} c_i u_i = 0$, pour un sous-ensemble fini J de I et des scalaires c_i dans $\mathbb{C}$ implique $c_i = 0$.

(3.4) Lemme : *Si $(u_i, \cdots, u_n)$ est une famille orthonormée dans V, pour tout x dans V, on a, $\forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$,*

$$\|x - \sum_1^n \lambda_i u_i\|^2 = \|x - \sum_1^n \langle x, u_i\rangle u_i\|^2 + \sum_1^n |\lambda_i - \langle x, u_i\rangle|^2,$$

$$\|x - \sum_1^n \langle x, u_i\rangle u_i\| \leq \|x - \sum_1^n \lambda_i u_i\|,$$

et en particulier ($\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$)

$$\|x\|^2 = \|x - \sum_1^n \langle x, u_i\rangle u_i\|^2 + \sum_1^n |\langle x, u_i\rangle|^2,$$

Preuve : Le vecteur $x - \sum_1^n \langle x, u_i\rangle u_i$ est orthogonal à u_j pour $j = 1, \cdots, n$. Ceci implique :

$$\begin{aligned} \|x - \sum_1^n \lambda_i u_i\|^2 &= \|x - \sum_1^n \langle x, u_i\rangle u_i\|^2 + \|\sum_1^n (\lambda_i - \langle x, u_i\rangle) u_i\|^2 \\ &= \|x - \sum_1^n \langle x, u_i\rangle u_i\|^2 + \sum_1^n |\lambda_i - \langle x, u_i\rangle|^2, \\ &\geq \|x - \sum_1^n \langle x, u_i\rangle u_i\|^2. \end{aligned}$$

□

La décomposition de x en sa projection orthogonale sur $Vec(u_1, \cdots, u_n)$ et un vecteur orthogonal à $Vec(u_1, \cdots, u_n)$ est donnée par

$$x = \sum_1^n \langle x, u_k\rangle u_k + (x - \sum_1^n \langle x, u_k\rangle u_k.).$$

(3.5) Lemme (Inégalité de Bessel) : *Si $(u_i)_{i\in I}$ est un système orthonormé quelconque (fini ou infini) dans un espace pré-hilbertien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, on a, pour tout x dans V :*

$$\sum_i |\langle x, u_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Preuve : Il suffit de démontrer pour tout système fini d'indices $J \subset I$ l'inégalité :

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i\in J} |\langle x, u_i\rangle|^2.$$

Cette inégalité résulte du lemme précédent.

□

(3.6) Théorème : (caractérisation des bases orthonormées) *Soit $S = (u_i)_{i\in I}$ un système orthonormé. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(1) (u_i) est un système orthonormé maximal dans V,
(2) l'espace vectoriel W engendré par les combinaisons linéaires finies des vecteurs u_i est dense dans V,
(3) pour tout $x \in V$, on a $\|x\|^2 = \sum_i |\langle x, u_i\rangle|^2$, $(*)$
(4) pour tous $x, y \in V$, on a $\langle x, y\rangle = \sum_i \langle x, u_i\rangle \overline{\langle y, u_i\rangle}$.

Preuve : La relation $(*)$ est appelée **égalité de Parseval**. La condition "S maximal" signifie que l'on ne peut étendre strictement S en un système orthonormé plus grand que S : il n'existe pas de vecteur non nul orthogonal à tous les vecteurs u_i de S.

Montrons l'équivalence des quatre conditions.

(1) $\Rightarrow$ (2) : Si la fermeture W est différente de V, il existe un vecteur y non nul orthogonal à W, donc aux u_i et le système S n'est pas maximal.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Soit x quelconque dans V. Si W est dense dans V,

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists J \text{ fini } \subset I \text{ et des scalaires } (\lambda_i)_{i\in J} \text{ tels que } \|x - \sum_J \lambda_i u_i\| \leq \varepsilon.$$

D'après le lemme 3.4, ceci implique

$$\|x - \sum_J \langle x, u_i\rangle u_i\| \leq \varepsilon.$$

Mais on a :

$$\|x\|^2 = \|\sum_{i\in J} \langle x, u_i\rangle u_i\|^2 + \|x - \sum_{i\in J} \langle x, u_i\rangle u_i\|^2 \leq \sum_{i\in J} |\langle x, u_i\rangle|^2 + \varepsilon^2,$$

d'où :

$$\|x\|^2 \leq \sum_i |\langle x, u_i\rangle|^2 + \varepsilon^2 \leq \|x\|^2 + \varepsilon^2,$$

ce qui entraîne l'égalité, ε étant arbitraire.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) : par "bilinéarisation" de l'égalité de Parseval.

(3) $\Rightarrow$(1) : Montrons que, sous la condition (4), le système S est maximal. Soit y orthogonal aux vecteurs u_i du système. D'après (3), on a : $\|y\|^2 = \sum |\langle y, u_i\rangle|^2 = 0$. □

Définition : Une famille $S = (u_i)_{i \in I}$ dans un espace de Hilbert $(V, \langle , \rangle)$ vérifiant les conditions équivalentes du théorème est appelée **base orthonormée** dans V.

• Existence de bases orthonormées

Plaçons-nous dans le cas **séparable**.

(3.7) Théorème : *Tout espace de Hilbert séparable contient une famille (finie ou dénombrable) formant une base orthonormée.*

Preuve : La démonstration repose sur le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Soit (x_n) une famille dénombrable dans V, dont les combinaisons linéaires sont denses. Nous allons effectuer la construction par récurrence d'une base orthonormée (u_n) à partir de (x_n).

Partons de x_1. Si $x_1 \neq 0$, soit $v_1 = x_1$ et $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, le système $\{u_1\}$ est orthonormé.

Si x_2 et u_1 sont indépendants, posons $v_2 = x_2 - \langle x_2, u_1 \rangle u_1$. Il est clair que l'indépendance de x_2 et de u_1 implique $\|v_2\| \neq 0$. On peut donc définir u_2 par $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$. Le système $\{u_1, u_2\}$ est orthonormé.

A chaque étape, on soustrait du nouveau vecteur sa projection sur le sous-espace engendré par les vecteurs précédents et on normalise le résultat.

A l'étape n, supposons construit le système $\{u_1, \cdots, u_{n-1}\}$. Soit $x_{n'}$, pour un indice $n' \geq n$, le premier vecteur de la suite (x_k) à partir du rang n, tel que $x_{n'}$ soit indépendant de $\{u_1, \cdots, u_{n-1}\}$. (Si ce vecteur n'existe pas, la construction s'arrête au rang $n-1$). Posons

$$v_n = x_{n'} - \sum_1^{n-1} \langle x_{n'}, u_k \rangle u_k.$$

On note que v_n est non nul, d'après l'indépendance de $x_{n'}, u_1, \cdots, u_{n-1}$. On peut définir $u_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$.

On a ainsi construit à l'étape n un système $\{u_1, \cdots, u_n\}$ orthonormé. Soit $S = \{u_1, \cdots, u_k, \cdots\}$ qui est un système fini ou infini dénombrable, orthonormé d'après ce qui précède. Il est clair que tout vecteur de la famille (x_k) est une combinaison linéaire finie de vecteurs u_k et réciproquement.

Les deux familles (x_n) et (u_n) engendrent donc le même sous-espace de combinaisons linéaires finies dans V, sous-espace dense d'après l'hypothèse sur le système (x_k). Le système S vérifie bien la condition (2) du théorème. C'est une base orthonormée.

□

Exercice : Soit g une fonction dans $L^2(\mathbb{R})$. On suppose que g n'est pas égale presque partout à une fonction continue. Soit $\mathcal{V}_0$ le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ orthogonal à g.

Montrer qu'on peut construire une base orthonormée de $\mathcal{V}_0$ formée de fonctions continues à support compact, mais que cette base ne peut pas être complétée en une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ formée de fonctions continues.

Le théorème précédent assure l'existence de bases orthonormées dans un espace préhilbertien et fournit un procédé pour en construire à partir d'un système total. Dans les exemples concrets, en particulier dans des espaces hilbertiens de fonctions, il est souhaitable d'avoir des exemples explicites de bases. Donnons quelques exemples.

Exemples :

1) Dans $\ell^2(\mathbb{N})$, soit $u_n = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$, l'élément dont le terme d'indice n seul est non nul et égal à 1. On obtient ainsi la base canonique qui forme une base orthonormée dans ℓ^2.

2) Les exponentielles $e_n : x \to \exp(2\pi i n x), n \in \mathbb{Z}$, forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T}^1)$. (On peut utiliser les noyaux de Fejer, qui sont des noyaux de convolution formant une identité approchée, pour prouver ce résultat).

3) Il en résulte que $(e_n 1_{[0,1[}, n \in \mathbb{Z})$ forme une base orthonormée de l'espace $L^2([0, 1[)$ (l'intervalle $[0, 1[$ étant muni de la mesure de Lebesgue).

4) Ceci fournit un procédé pour construire des bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$: on commence par "localiser" les fonctions (multiplication par une "fenêtre"), puis on effectue une analyse de Fourier locale. La famille $(e_n 1_{[n,n+1[}, n, k \in \mathbb{Z})$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Néanmoins, si la construction est simple, elle présente plusieurs inconvénients. En particulier les bases de Fourier dans $L^p(\mathbb{T})$ ne sont pas inconditionnelles, pour $p \neq 2$. L'inconditionnalité est une propriété importante que possèdent les bases orthonormées dans les espaces de Hilbert et que nous allons étudier plus loin. On est ainsi amené à chercher de meilleures bases de $L^2(\mathbb{R})$, qui soient également de bonnes bases de $L^p(\mathbb{R})$ et des espaces fonctionnels usuels. Les bases d'ondelettes introduites depuis une dizaine d'années dans leur version actuelle répondent à cette exigence. La base de Haar est un exemple prototype d'une bonne base.

4 Autres exemples de bases de Schauder

(4.1) Dans l'espace $(\ell_0(\mathbb{N}), \| \; \|_\infty)$ des suites tendant vers 0 à l'infini muni de la norme uniforme, la suite des vecteurs $(e_n)_{n \geq 1}$, où $e_n(k) = \delta_{n,k}, k \geq 1$, forme une base de Schauder. De plus cette base est normalisée (les vecteurs de la base sont de norme 1) et monotone (la constante K de la proposition (2.2) vaut 1).

On a une propriété analogue dans $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$.

Dans l'espace $c(\mathbb{N})$ des suites convergentes muni de la norme uniforme, on obtient une base de Schauder en rajoutant au système (e_n) précédent, le vecteur (noté e_0) qui est la suite identiquement égale à 1 $(e_0(k) = 1, \forall k \geq 1)$.

De même, il est clair que la base canonique de $\ell^p(\mathbb{N})$ est une base monotone.

• Base de Haar

(4.2) On considère les fonctions définies sur l'intervalle $[0,1]$ de la façon suivante.

Soit $\chi_0(t) = 1$. Pour $n = 2^k + \ell$, avec $k = 0, 1, 2, ..., \ell = 0, ..., 2^k - 1$, on pose :

$$\chi_n(t) = \begin{cases} 1, \text{ pour } t \in [\ell 2^{-k}, \ell 2^{-k} + 2^{-(k+1)}[, \\ -1, \text{ pour } t \in [\ell 2^{-k} + 2^{-(k+1)}, (\ell+1)2^{-k}[, \\ 0, \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Les combinaisons linéaires des fonctions χ_n engendrent les indicatrices des intervalles dyadiques $[\ell 2^{-k}, (\ell+1)2^{-k}[$. Ce système est donc total dans $L^p([0,1])$, $1 \leq p < \infty$. Montrons qu'on a, $1 \leq p \leq \infty$:

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_i\|_p \leq \|\sum_{i=1}^{m} a_i \chi_i\|_p, \text{ pour } 1 \leq n \leq m. \tag{6}$$

(La constante K de base de Schauder est donc égale à 1, la base est monotone).

Soient $f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_i(t)$, $g(t) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \chi_i(t)$. Ces fonctions ne diffèrent que sur un intervalle dyadique, sur lequel f a une valeur constante notée b. La fonction g est égale sur la première moitié de cet intervalle à $b + a_{n+1}$ et sur la deuxième moitié égale à $b - a_{n+1}$. L'inégalité

$$2|b|^p \leq |b + a_{n+1}|^p + |b - a_{n+1}|^p, \text{ pour } 1 \leq p < \infty, \tag{7}$$

implique le résultat : $\|f\|_p \leq \|g\|_p$.

Pour la norme du sup, l'inégalité (7) devient :

$$|b| \leq \sup(|b - a_{n+1}|, |b - a_{n+1}|. \tag{8}$$

Les inégalités (7) et (8) impliquent (6) et donc la propriété de base monotone pour le système (χ_n).

La base de Haar est obtenue en normalisant les fonctions χ_n. Posons $h_n = 2^{-k/2}\chi_n$, pour $n = 2^k + \ell$, avec $k = 0, 1, 2, ..., \ell = 0, ..., 2^k - 1$.

Le système orthonormal ainsi construit, comme le système (χ_n), vérifie la propriété de base monotone : le système de Haar est une base monotone (pour la norme uniforme) de l'espace des fonctions qu'il engendre au sens de la convergence uniforme (i.e. l'espace formé des fonctions qui sont des limites uniformes de combinaisons linéaires finies des (h_n). On vérifiera que cet espace est l'espace des fonctions réglées sur $[0,1]$. En particulier, toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une série donnant son développement dans le système de Haar. Comme il s'agit d'un système orthonormal, les coefficients du développement d'une fonction f sont les produits scalaires de f avec les éléments de la base.

Ce résultat contraste avec le fait qu'il existe des fonctions continues qui ne sont pas limite ponctuelle de leur série de Fourier et a été à l'origine de l'introduction par Haar de la famille de fonctions qui porte son nom vers 1905.

• **Base de Schauder (ou de Faber)**

(4.3) Les fonctions du système de Haar ont l'inconvénient d'être discontinues. Par intégration de ces fonctions, on obtient les fonctions (continues, linéaires par morceaux) notées (ϕ_n), qui forment ce que l'on appelle le système de Schauder (d'où le nom général de base de Schauder) également introduit par Faber. Ces fonctions ne forment plus un système orthogonal, mais on peut orthonormaliser le système par le procédé de Schmidt.

(4.4) Proposition : *Le système de Schauder* (ϕ_n) *est une base monotone (i.e* $K = 1$*) de* $\mathcal{C}[0,1]$.

Preuve : Les combinaisons linéaires des fonctions ϕ_n sont les fonctions continues linéaires par morceaux sur $[0,1]$, dont les changements de pente ont lieu en des points dyadiques. Pour tout n, l'intervalle sur lequel ϕ_{n+1} est non nul est tel que les fonctions ϕ_i, pour $1 \leq i \leq n$ sont linéaires. Une somme de la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i$, restreinte à cet intervalle, atteint alors la borne supérieure de sa valeur absolue au bord de l'intervalle, là où ϕ_{n+1} s'annule, et donc on a bien :

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i\|_\infty \leq \|\sum_{i=1}^{n+1} a_i\phi_i\|_\infty.$$

5 Bases de Haar généralisées

• **Une construction générale**

(5.1) On considère un ensemble X. Rappelons qu'il existe un ordre sur l'ensemble des partitions de X : étant données deux partitions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, on dit que $\mathcal{P}'$ est plus fine que $\mathcal{P}$, si les atomes de $\mathcal{P}$ sont réunions d'atomes de $\mathcal{P}'$. En d'autres termes, la partition $\mathcal{P}'$ est obtenue en découpant les atomes (ou éléments) formant la partition $\mathcal{P}$. Ceci définit un ordre sur l'espace des partitions.

Considérons maintenant une suite croissante $(\mathcal{P}_n)$ de partitions finies de X. Nous supposons que : $\mathcal{P}_0 = \{X\}$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ est obtenue à partir de $\mathcal{P}_n$ en "redécoupant" un atome de $\mathcal{P}_n$ en deux atomes non vides.

La partition $\mathcal{P}_n$ est donc formée de $n+1$ atomes non-vides. Notons $\mathcal{V}_n$ l'espace de dimension $n+1$ formé des fonctions à valeurs réelles qui sont constantes sur chaque atome de $\mathcal{P}_n$.

Considérons la suite (ϕ_n) de fonctions sur X telle que, $\phi_0 = 1$ sur X et $\phi_{n+1} = 1_{A_1} - 1_{A_2}$, en notant A l'atome de $\mathcal{P}_n$ redécoupé en deux atomes A_1 et A_2 de $\mathcal{P}_{n+1}$ dans la construction de $\mathcal{P}_{n+1}$ à partir de $\mathcal{P}_n$.

Montrons par récurrence que, pour chaque $n \geq 1$, la famille $\{\phi_0, ..., \phi_n\}$ forme une base de $\mathcal{V}_n$. Soit A l'atome de $\mathcal{P}_n$ redécoupé en deux atomes A_1 et A_2. On a $1_A = \sum_0^n \alpha_j\phi_j$, par l'hypothèse de récurrence et

$$1_{A_1} = \frac{1}{2}(1_A + \phi_{n+1}), 1_{A_2} = \frac{1}{2}(1_A - \phi_{n+1}).$$

• **Propriété de base monotone**

Le système (ϕ_n) possède la propriété de "base monotone" exprimée dans le lemme suivant :

5.2 Lemme : $\forall n \geq 1$, *pour tous réels* $a_0, ..., a_n, a_{n+1}$, *on a :*

$$\| \sum_0^n a_j \phi_j \|_\infty \leq \| \sum_0^{n+1} a_j \phi_j \|_\infty .$$

Preuve : Notons ψ_n et ψ_{n+1} les deux fonctions figurant respectivement à gauche et à droite. Ces fonctions diffèrent uniquement sur le support de ϕ_{n+1} qui est l'atome A redécoupé dans le passage de $\mathcal{P}_n$ à $\mathcal{P}_{n+1}$. Sur A, ψ_n a une valeur constante α, tandis que ψ_{n+1} prend les valeurs $\alpha + a_{n+1}$, $\alpha - a_{n+1}$. On a bien $|\alpha| \leq \sup(|\alpha + a_{n+1}|, |\alpha - a_{n+1}|)$.

□

Notons $\mathcal{W}$ l'espace des fonctions à valeurs réelles sur X qui sont limites uniformes de suites de fonctions appartenant à $\bigcup_n \mathcal{V}_n$. Une fonction f est donc dans $\mathcal{W}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n et une fonction g "$\mathcal{P}_n$-mesurable" (i.e. constante sur les atomes de la partition finie $\mathcal{P}_n$) telle que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

5.3 Théorème : *Toute fonction dans* $\mathcal{W}$ *est la somme d'une série uniformément convergente de la forme* $\sum_0^\infty a_j \phi_j$.

Ce résultat est la conséquence d'un thèorème général pour les bases monotones dans un espace de Banach.

5.4 Théorème : *Soit* $(B, \| \, \|)$ *un espace de Banach. Soit* (ϕ_j) *une suite dans* B *de vecteurs non nuls dont les combinaisons linéaires sont denses dans* B *et vérifiant la condition (de base monotone) :*

$$\| \sum_0^n a_j \phi_j \| \leq \| \sum_0^m a_j \phi_j \|, \forall n, m, 1 \leq n < m. \tag{9}$$

Alors tout vecteur f *dans* B *est la somme d'une série convergente dans* $(B, \| \, \|)$ *de la forme* $f = \sum_0^\infty a_j \phi_j$.

Preuve : Il suffit de montrer que le sous-espace B_0 formé des vecteurs f de la forme $f = \sum_{j=0}^\infty a_j \phi_j$, avec convergence en norme dans $(B, \| \, \|)$ est fermé dans B.

Soit (f_k) dans B_0 (avec $f_k = \sum_{j=0}^\infty a_j^k \phi_j$) une suite convergeant vers un vecteur f de B : $\lim_k \|f_k - f\| = 0$.

D'après la condition (9) et la convergence en norme, on a :

$$\| \sum_{j=0}^n (a_j^k - a_j^{k'}) \phi_j \| \leq \| \sum_{j=0}^\infty (a_j^k - a_j^{k'}) \phi_j \| \leq \|f_k - f_{k'}\|. \tag{10}$$

Pour tout n fixé, la suite $(\sum_{j=0}^n a_j^k \phi_j)_{k \geq 1}$ est donc de Cauchy et converge dans $(B, \| \, \|)$. Comme $(\phi_0, ...\phi_n)$ forme une base de l'espace $\mathcal{V}_n$ engendré de dimension $n+1$, par équivalence des normes en dimension finie, les suites (a_j^k) des coefficients sont convergentes pour chaque k. Notons $a_j = \lim_k a_j^k$. Il reste à montrer que $\lim_n \|f - \sum_0^n a_j\phi_j\| = 0$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $L(\varepsilon)$ tel que $\|f_k - f_{k'}\| < \varepsilon, \forall k, k' \geq L(\varepsilon)$. D'après (10), on a, pour tout n :

$$\|\sum_{j=0}^{n} a_j^k\phi_j - \sum_{j=0}^{n} a_j^{k'}\phi_j\| \leq \varepsilon, \forall k, k' \geq L(\varepsilon);$$

d'où :

$$\|\sum_{j=0}^{n} a_j^k\phi_j - \sum_{j=0}^{n} a_j\phi_j\| \leq \varepsilon, \forall k \geq L(\varepsilon).$$

Par l'inégalité triangulaire, on obtient, en fixant un $k \geq L(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
&\| \sum_{j=0}^{n} a_j\phi_j - f\| \\
\leq\ & \|\sum_{j=0}^{n} a_j\phi_j - \sum_{j=0}^{n} a_j^k\phi_j\| + \|\sum_{j=0}^{n} a_j^k\phi_j - f_k\| + \|f_k - f\| \\
\leq\ & \varepsilon + \|\sum_{j=0}^{n} a_j^k\phi_j - f_k\| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Le majorant est $\leq 3\varepsilon$, pour n assez grand.

□

Remarque : Le résultat reste vérifié si la condition (9) est remplacée par : il existe une constante K telle que

$$\|\sum_{0}^{n} a_j\phi_j\| \leq K\|\sum_{0}^{m} a_j\phi_j\|, \forall n, m, 1 \leq n < m.$$

• **Exemple : la base de Haar**

Il est clair que le système des fonctions (χ_n) construite en (4.2) est un cas particulier de la construction décrite plus haut.

• **Lien avec les martingales**

(5.5) Revenons à la construction générale décrite au début du paragraphe. Supposons donnée sur l'espace X une structure d'espace probabilisé, i.e. une tribu $\mathcal{A}$ et une mesure de probabilité sur $\mathcal{A}$. Les atomes des partitions $\mathcal{P}_n$ construites par "découpage" sont supposés *$\mathcal{A}$-mesurables* et de *μ-mesure non nulle*. On peut alors contruire un système monotone qui soit en même temps orthonormalisé pour la mesure μ.

Pour cela, il suffit de modifier convenablement la construction des fonctions ϕ_n. En reprenant les notation du début, à chaque étape, si A est l'atome de $\mathcal{P}_n$ coupé en deux atomes A_1 et A_2 de $\mathcal{P}_{n+1}$, on pose

$$\psi_{n+1} = (\mu(A_1))^{-1}1_{A_1} - (\mu(A_2))^{-1}1_{A_2}.$$

Les fonctions ψ_n forment un système orthogonal dans $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Chaque ψ_n est de norme non nulle et on peut normaliser le système (ψ_n) pour obtenir un système (h_n) orthonormal dans $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Notons encore $\mathcal{P}_n$ la tribu (finie) engendrée par les atomes de la partition $\mathcal{P}_n$ et soit $\mathcal{P}_\infty$ la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendré par l'algèbre (au sens ensembliste) formée de la famille des ensembles $\mathcal{P}_n$ mesurables, pour un $n \geq 0$.

On vérifie que l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{P}_n$ s'écrit :

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{P}_n) = \sum_{k=0}^{n} \langle h_k, f\rangle\, h_k.$$

D'après la théorie des martingales, on a, au sens $L^1(\mu)$ et μ-presque partout :

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} \langle h_k, f\rangle\, h_k = \lim_n \mathbb{E}(f|\mathcal{P}_n) = \mathbb{E}(f|\mathcal{P}_\infty).$$

En particulier, si $\mathcal{P}_\infty = \mathcal{A}$, on obtient, au sens $L^1(\mu)$ et μ-presque partout :

$$f = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \langle h_k, f\rangle\, h_k.$$

La base de Haar construite sur $[0, 1]$ vérifie en particulier cette propriété. Elle fournit donc une base orthonormée de $L^2([0, 1])$ (pour la mesure de Lebesgue uniforme sur $[0, 1]$), pour laquelle il y a convergence presque-partout.

6 Bases inconditionnelles

Les bases orthonormées dans les espaces de Hilbert ont des propriétés remarquables. Par exemple, si (e_k) est une base orthonormée dans un espace de Hilbert,
- la convergence de la série $\sum_k \alpha_k e_k$ ne dépend que de la suite des modules $(|\alpha_k|)_{k\geq 1}$;
- la convergence de la série reste inchangée si l'on permute l'ordre des éléments de la base.

On aimerait étendre ce type propriété en dehors du cadre hilbertien orthonormé. Introduisons pour cela la notion de convergence inconditionnelle.

(6.1) Proposition : *Pour une suite de vecteurs* (y_n) *dans un espace de Banach* $(E, \| \ \|)$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) la série $\sum_n y_{\pi(n)}$ *converge, pour toute permutation* π *des entiers,*

ii) la série $\sum_i y_{n_i}$ *converge, pour toute sous-suite croissante* $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$,

iii) la série $\sum_n \theta_n y_n$ *converge, pour tout choix des signes* $\theta_n = \pm 1$,

iv) $\forall \varepsilon > 0$, *il existe* n *tel que* $\| \sum_{i \in I} y_i \| < \varepsilon$, *pour tout ensemble fini d'indices* I *tel que* $\inf(i \in I) > n$.

Preuve : L'équivalence entre *ii)* et *iii)* est évidente.

Supposons qu'on ait *iv)*. Les sommes partielles dans *i)* et *ii)* vérifient le critère de Cauchy, et donc convergent. Ainsi, *iv)* implique *i)* et *ii)*.

Supposons maintenant que *iv)* ne soit pas vérifiée. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et des ensembles finis I_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$, tels que $q_n = \sup(i, i \in I) < p_{n+1} = \inf(i, i \in I_{n+1})$ et $\| \sum_{i \in I_n} y_i \| \geq \varepsilon, \forall n$. La réunion $I = \cup I_n$ est une suite infinie d'entiers telle que $\sum_{i \in I} y_i$ ne converge pas, ce qui contredit *ii)*.

Enfin, si π est une permutation d'entiers qui, pour tout $n \geq 1$, applique l'intervalle $\{i : p_n \leq i \leq q_n\}$ sur lui-même, de façon que $\pi^{-1}(I_n) = \{p_n, p_n + 1, \cdots, p_n + k_n\}$, où $k_n = Card(I_n)$, alors $\sum_i y_{\pi(i)}$ ne converge pas, ce qui contredit *i)*.

□

Définition : Sous les conditions équivalentes du théorème, on dit que la série $\sum y_n$ est **inconditionnellement convergente**. On montre qu'alors la somme $\sum y_{\pi(n)}$ ne dépend pas alors de la permutation π.

On pourra montrer en exercice le résultat suivant :

Si $\sum y_n$ *est une série inconditionnellement convergente, l'application de* $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ *(muni de la topologie produit) dans* E, *définie par*

$$\theta = (\theta_n) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}} \to \sum \theta_n y_n$$

est continue et d'image compacte pour la norme uniforme.

Si la série des normes $\sum \|y_n\|$ converge, on dit que la série $\sum y_n$ **absolument convergente** (on dit aussi que la série est **normalement** convergente). Dans un espace de Banach, cette propriété implique la convergence. C'est une propriété plus forte que la convergence inconditionnelle.

En dimension finie, la convergence inconditionnelle et la convergence absolue sont équivalentes. Par contre, en dimension infinie il existe des séries qui convergent inconditionnellement, mais non absolument.

Définition : On dit qu'une base (de Schauder) $(e_n)_{n\geq 1}$ d'un espace normé $(E, \| \ \|)$ est **une base inconditionnelle**, si, pour tout $x \in E$, son développement dans la base (e_n), donné par la série $\sum_n a_n e_n$ converge inconditionnellement. La proposition suivante donne différentes formes équivalentes à l'inconditionnalité pour une base.

(6.2) Proposition : *Pour une base (de Schauder) (e_n) dans un espace de Banach $(E, \| \ \|)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) la famille $(e_{\pi(n)})$ est une base, pour toute permutation π des entiers ;

ii) pour toute série $\sum_n a_n e_n$ convergente, la série $\sum_n b_n e_n$ converge, pour toute suite (b_n) telle que $|b_n| \leq |a_n|$.

iii) pour toute série $\sum_n a_n e_n$ convergente, la série la série $\sum_n \theta_n a_n e_n$ converge, pour tout choix des signes $\theta_n = \pm 1$.

Preuve : Soit (e_n) est une base de Schauder dans un espace de Banach. Nous savons que, pour tout sous-ensemble **fini** d'entiers I, on définit un projecteur continu P_I en posant :

$$P_I(\sum_n a_n e_n) = \sum_{n\in I} a_n e_n.$$

Si (e_n) est une base inconditionnelle, alors la condition $ii)$ et le théorème du graphe fermé impliquent que, pour tout sous-ensemble d'entiers I, $P_I(\sum_n a_n e_n) = \sum_{n\in I} a_n e_n$ définit encore un projecteur continu.

On montre de même que, pour tout choix $\theta = (\theta_n)$ de signes, l'application

$$M_\theta : \sum_n a_n e_n \to \sum_n \theta_n a_n e_n$$

définit une application linéaire continue M_θ. En appliquant le théorème de Banach-Steinhaus, on obtient :

$$\sup_\theta \|M_\theta\| = K < \infty.$$

Enfin, montrons qu'il existe une constante K telle que, pour toute suite de scalaires (λ_n), on a :

$$\| \sum \lambda_n a_n e_n \| \leq K \sup_n |\lambda_n| \| \sum_n a_n e_n \|.$$

En effet, supposons les scalaires réels. Soit $y = \sum \lambda_n a_n e_n$ une somme finie. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue ϕ de norme 1 telle que $\|y\| = \phi(y) = \sum \lambda_n a_n \phi(e_n)$. Soit $\theta_n = sgn(a_n \phi(e_n))$. On a :

$$\begin{aligned}
\| \sum_n \lambda_n a_n e_n \| &\leq \sum_n |\lambda_n| |a_n \phi(e_n)| \leq (\sup_n |\lambda_n|) \sum_n \theta_n a_n \phi(e_n) \\
&= (\sup_n |\lambda_n|)\, \phi(M_\theta(\sum_n a_n e_n)) \leq (\sup_n |\lambda_n|) \|M_\theta(\sum_n a_n e_n)\| \\
&\leq (\sup_n |\lambda_n|) K \| \sum_n a_n e_n \|.
\end{aligned}$$

Cette majoration s'étend des combinaisons finies aux séries convergentes. On a ainsi montré que si $|b_n| \leq |a_n|, \forall n \geq 1$, et si $\sum a_n e_n$ converge, alors $\sum b_n e_n$ converge, puisqu'elle vérifie, par la majoration précédente, le critère de Cauchy.

□

Exercice : Montrer que *si* $(E, \| \ \|)$ *est un espace réflexif, la base duale de toute base inconditionnelle de* $(E, \| \ \|)$ *est elle-même inconditionnelle.*

Dans le cas d'un espace de Hilbert $(V, \langle, \rangle)$, il est clair que toute base orthonormée est inconditionnelle. La propriété suivante, plus faible que l'orthogonalité, assure encore l'inconditionalité.

Définition : Le système $(e_n)_{n\geq 1}$ forme une **base de Riesz** dans $(V, \langle, \rangle)$, si les combinaisons linéaires d'éléments du système (e_n) sont denses dans V et s'il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait, pour toute suite finie (c_n) :

$$\frac{1}{C} \sum_n |c_n|^2 \leq \| \sum_n c_n e_n \|^2 \leq C \sum_n |c_n|^2.$$

7 Critères d'inconditionnalité dans les L^p

Fonctions de Rademacher :

Ecrivons $x \in [0, 1[$ en base 2, $x = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} x_n$. La fonctions de Rademacher d'ordre n est définie par $R_n(x) = 2x_n - 1$, ou de façon équivalente, par $R_n(x) = sign(\sin(2^n x))$.

La famille $(R_n), n \geq 1$ constitue un sytème de fonctions orthonormé sur $[0, 1[$, formé de fonctions en escalier, R_n étant constante sur les intervalles dyadiques d'ordre n (i.e. de la forme $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$.

Cette famille n'est pas totale dans $L^2([0, 1])$. Nous verrons que le sous-espace fermé $\mathcal{R}$ engendré par les R_n dans $L^2([0, 1])$ a la propriété remarquable que les fonctions dans $\mathcal{R}$ sont dans $L^p([0, 1])$, pour tout $p \in [1, \infty[$, et que les normes $\| \ \|_p$ sur $\mathcal{R}$ sont équivalentes entre elles, pour $p > 1$.

La construction précédente s'interprète bien du point de vue probabiliste. Le codage en base 2 permet d'établir une correspondance entre les espaces $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et $[0, 1[$. A une suite $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n, ...)$ élément de Ω, on fait correspondre le réel $\phi(\omega) = \sum_1^{\infty} \omega_n 2^{-n}$. L'application ϕ est borélienne et binunivoque, si l'on prive Ω de l'ensemble dénombrable formé des suites se terminant par des "1" (les nombres dyadiques ont deux développements). Elle transporte la mesure produit $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^{\mathbb{N}}$ sur la mesure de Lebesgue uniforme sur $[0, 1]$. Notons Y_n les applications coordonnées sur Ω. La famille des variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ définies par $X_n = 2Y_n - 1$ est formée de v.a. indépendantes, identiquement distribuées et centrées. Les composées $R_n \circ \phi$ s'identifient aux X_n.

Ainsi, les fonctions R_n peuvent être vues comme des variables aléatoires indépendantes de même loi et centrées. (Ceci implique en particulier qu'elles sont deux à deux orthogonales.)

Avant d'établir les inégalités de Khintchin, rappelons deux lemmes sur les normes $\| \ \|_p$.

(7.1) Lemme : *La fonction* $p \to \log(\int_0^1 |f|^p \ dx)$ *est convexe pour* $p > 0$.

Preuve : Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$ et $p_1 \leq p_2$. L'inégalité de Hölder (appliquée aux fonctions $|f|^{\alpha p_1}$ et $|f|^{\beta p_2}$ et aux exposants conjugués $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$) donne :

$$\int_0^1 |f|^{\alpha p_1 + \beta p_2} \ dx \leq (\int_0^1 |f|^{p_1} \ dx)^\alpha (\int_0^1 |f|^{p_2} \ dx)^\beta.$$

□

On notera que sur $[0,1]$ on a les inclusions évidentes $L^p([0,1]) \subset L^2([0,1])$, pour $p \geq 2$. La norme $\| \ \|_p$ calculée sur $[0,1]$ est, d'autre part, une fonction croissante de p :

(7.2) Lemme : *Si* f *est une fonction mesurable sur* $[0,1]$, *ou plus généralement sur un espace muni d'une mesure de probabilité :*

$$\|f\|_{p_1} \leq \|f\|_{p_2} \leq \infty, \ \forall 1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty.$$

Preuve : En posant $\alpha = p_2/p_1$ et en prenant β tel que $1/\alpha + 1/\beta = 1$, on obtient :

$$\int_0^1 |f|^{p_1} \ 1 \ dx \leq (\int_0^1 (|f|^{p_1})^\alpha \ dx)^{1/\alpha} \ (\int_0^1 1^\beta \ dx)^{1/\beta} \leq (\int_0^1 |f|^{p_2} \ dx)^{p_1/p_2}.$$

□

(7.3) Proposition (Inégalités de Khinchin) : *Soit* $(R_n)_{n \geq 1}$ *la suite des fonctions de Rademacher. Pour tout* p, $1 \leq p < \infty$, *il existe des constantes* $A_p > 0$ *et* B_p *telles que, pour toute suite finie* (a_n) *de réels, on ait :*

$$A_p(\sum_i a_i^2)^{p/2} \leq \| \sum_i a_i R_i\|_p^p \leq B_p(\sum_i a_i^2)^{p/2}.$$

Pour $p = 2r \geq 2$ *entier pair, on peut prendre pour* B_{2r} *la constante* $B_{2r} = \dfrac{(2r)!}{2^r r!}$.

Preuve : 1) Considérons d'abord le cas $p \geq 2$. D'après l'inclusion $L^p[0,1] \subset L^2[0,1]$ et l'inégalité $\|f\|_2 \leq \|f\|_p$, il suffit de démontrer la deuxième majoration. Comme la norme $\| \ \|_p$ est une fonction croissante de $p \geq 1$, on peut supposer que p est un entier pair : $p = 2r$, où r est un entier ≥ 1.

Faisons l'hypothèse de récurrence que, pour tous les entiers ℓ tels que $1 \leq \ell \leq r$, l'inégalité $\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i R_i\|_\ell^\ell \leq B_{2\ell}(\sum_i a_i^2)^\ell$ est vérifiée, pour toutes les suites (a_i) de longueur $n-1$, avec $B_{2\ell} = \frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell!}$.

Posons $S_n(t) = \sum_1^n a_k R_k(t)$. On obtient, par la formule du binôme :

$$\int (S_n)^{2r} \ dt = \int (S_{n-1} + a_n R_n)^{2r} \ dt = \sum_{j=0}^{2r} C_{2r}^j a_n^{2r-j} \int (S_{n-1}(t))^j R_n(t)^{2r-j} \ dt.$$

La propriété d'indépendance entre S_{n-1} et R_n implique que les intégrales dans la somme sont égales au produit des intégrales $(\int (S_{n-1}(t))^j \, dt)$ $(\int R_n(t)^{2r-j} \, dt)$ et donc nulles, sauf pour j pair. Pour une valeur paire de j, $j = 2\ell$, on a $R_n(t)^{2r-2\ell} = 1$ et l'intégrale $\int R_n(t)^{2r-2\ell} \, dt$ est égale à 1. On a donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
\int (S_n)^{2r} \, dt &= \sum_{\ell=0}^{r} C_{2r}^{2\ell} a_n^{2r-2\ell} (\int (S_{n-1}(t))^{2\ell} \, dt) \\
&\leq \sum_{0}^{r} C_{2r}^{2\ell} B_{2\ell} (\sum_{1}^{n-1} a_i^2)^{\ell} (a_n^2)^{r-\ell} \\
&\leq B_{2r} \sum_{0}^{r} C_r^{\ell} (a_n^2)^{r-\ell} (\sum_{1}^{n-1} a_i^2)^{\ell} = B_{2r} (\sum_{1}^{n} a_i^2)^r.
\end{aligned}$$

On a utilisé dans la dernière majoration l'inégalité

$$C_{2r}^{2\ell} B_{2\ell} \leq C_r^{\ell} B_{2r}, \ \forall \ell \leq r,$$

qui se vérifie immédiatement.

2) Pour $1 \leq p < 2$, prenons $\alpha, \beta \geq 0$, tels que $\alpha + \beta = 1$, $p\alpha + 4\beta = 2$ (ce qui est possible pour $1 \leq p < 2$). Soit $S_n = \sum_1^n a_i R_i$. En utilisant la majoration (vérifiée d'après 1))

$$\int S_n^4 \, dx \leq 3(\sum a_i^2)^2,$$

et en appliquant le lemme 7.1, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{1}^{n} a_i^2 = \|S_n\|_2^2 &\leq \|S_n\|_p^{p\alpha} \, \|S_n\|_4^{4\beta} \\
&\leq \|S_n\|_p^{p\alpha} [\sqrt{2} (\sum a_i^2)^{1/2}]^{4\beta};
\end{aligned}$$

d'où :

$$4^{-\frac{1}{p}\frac{\beta}{\alpha}} (\sum a_i^2)^{1/2} \leq \|S_n\|_p.$$

□

(7.4) Corollaire : *Les normes $\| \; \|_p$, pour $1 < p < \infty$, sont équivalentes sur le sous-espace fermé de $L^2([0,1])$ engendré par les fonctions de Rademacher.*

Inconditionnalité dans les espaces L^p

Soient X un espace mesurable et μ une mesure positive sur X. Considérons les espaces de Banach $L^p(X, \mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

Pour $p = \infty$, $L^\infty(X, \mu)$, qui n'est pas séparable, ne possède pas de base de Schauder. On peut montrer que $L^1(X, \mu)]$ ne possède pas de base inconditionnelle. Examinons le cas $1 < p < \infty$.

Désignons par $(e_k)_{k \geq 1}$ une base de $L^p(X, \mu)$, où p vérifie $1 < p < \infty$. L'utilisation des inégalités de Khintchin va nous permettre de démontrer le critère d'inconditionnalité suivant :

(7.5) Proposition : *Une série de fonctions $\sum_k f_k$ est inconditionnellement convergente dans $L^p(X,\mu)$, pour $1 < p < \infty$, si, et seulement si*

$$\int_X (\sum_k |f_k|^2)^{p/2} \ dx < \infty.$$

Preuve : On peut supposer les fonctions à valeurs réelles. Si la série de fonctions $\sum_k f_k$ est inconditionnellement convergente dans $L^p(X,\mu)$, il existe une constante $K < \infty$ telle que, pour toute suite de scalaires (a_n) vérifiant $|a_n| \leq 1$, $\forall n$, on ait : $\| \sum_k a_k f_k\|_p \leq K$.

En prenant pour coefficients a_k les fonctions de Rademacher, on obtient, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\int_X |\sum_k R_k(t) f_k(x)|^p \ dx = \| \sum_k a_k f_k\|_p^p \leq K^p.$$

Intégrons cette inégalité en t et permutons les intégrales par le théorème de Fubini :

$$\int_X (\int_0^1 |\sum_k R_k(t) f_k(x)|^p \ dt) \ dx = \| \sum_k a_k f_k\|_p^p \leq K^p.$$

D'autre part, d'après les inégalités de Khinchin, on a, pour tout x :

$$(\sum_k f_k^2(x))^{p/2} \leq B_p \| \sum_k f_k(x) R_k(.)\|_p^p = B_p \int_0^1 |\sum_k f_k(x) R_k(t)|^p \ dt.$$

D'où :

$$K^p \geq \int_X (\int_0^1 |\sum_k R_k(t) f_k(x)|^p \ dt) \ dx \geq \int_X (\sum_k f_k^2(x))^{p/2} \ dx.$$

□

De la même façon, on montre :

(7.6) Théorème : *Une base $(e_k)_{k\geq 1}$ est inconditionnelle dans $L^p(X,\mu)$, pour $1 < p < \infty$ si, et seulement si, il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait, pour tout n et toute suite finie $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ de scalaires,*

$$\frac{1}{C} \int_X [\sum_{k=1}^n |a_k|^2 |e_k|^2]^{p/2} d\mu \leq \int_X |\sum_{k=1}^n a_k e_k|^p d\mu \leq C \int_X [\sum_{k=1}^n |a_k|^2 |e_k|^2]^{p/2} d\mu.$$

Preuve : Si (e_n) est une base inconditionnelle dans $L^p(X,\mu)$, il existe une constante K telle que, si $f = \sum_k a_k e_k$ est le développement d'une fonction f dans cette base, pour tout choix de signe ε_n, on ait :

$$\| \sum_k a_k \varepsilon_k e_k\|_p^p \leq K \|f\|_p^p.$$

On en conclut comme précédemment qu'on a une majoration de la forme

$$\int_X (\sum_k a_k^2 e_k^2(x))^{p/2}\ dx \leq C_1 \|f\|_p^p,$$

pour une constante C_1. On a donc $\sum_k a_k^2 e_k^2(.) \in L^{p/2}(X, \mu)$.

□

Examinons la situation suivante, dans laquelle nous ne considérons que des fonctions à valeurs réelles. Pour $1 < p \leq 2$, l'espace de Banach $B = L^p([0,1])$ contient l'espace de Hilbert $H = L^2([0,1])$. Soit (e_n) une base orthonormée de H. La condition $\sum |\langle f, e_n\rangle|^2 < \infty$ implique que f est dans H.

Si l'on a $\sum a_n^2 e_n^2 \in L^{p/2}$, avec $a_n = \int f \overline{e_n}\ dx$, alors $\sum a_n^2 e_n^2 \in L^{p/2}$ est bornée sur un borélien A de mesure $\delta > 0$ par une constante C. On a donc :

$$\int_E \sum a_n^2 e_n^2\ dx = \sum a_n^2 \int_E e_n^2\ dx \leq C.$$

Si $\liminf \int_E e_n^2\ dx > 0$, ceci implique que la série $\sum_n a_n^2$ converge et donc $f \in H$.

Ceci montre en particulier que le système $(1, \cos 2\pi nx, \sin 2\pi nx, n \geq 1)$ ne forme pas une base inconditionnelle de $L^p([0,1])$, pour $1 < p < 2$. (Le cas $p > 2$ se traite par dualité).

Remarques :

a) Pour une base inconditionnelle (e_k), on a donc l'équivalence :

$$\sum_k a_k e_k \text{ converge dans } L^p(X,\mu) \Longleftrightarrow [\sum_k |a_k|^2 |e_k|^2]^{1/2} \in L^p(X,\mu).$$

b) Considérons le cas $p = 2$ et supposons que $(e_k)_{k\geq 1}$ forme une base inconditionnelle dans $L^2(X,\mu)$ et vérifie

$$0 < \alpha = \inf_{k\geq 1} \int_X |e_k|^2 d\mu \leq \beta = \sup_{k\geq 1} \int_X |e_k|^2 d\mu < +\infty.$$

Le critère d'inconditionnalité s'écrit alors :

$$\frac{\alpha}{C} \sum_k |a_k|^2 \leq \| \sum_k a_k e_k \|_{L^2(X,\mu)}^2 \leq \beta C \sum_k |a_k|^2.$$

Le système $(e_k)_{k\geq 1}$ forme donc une **base de Riesz** dans $L^2(X,\mu)$.

c) Notons que ce critère prouve que les bases inconditionnelles dans un espace de Hilbert sont les bases de Riesz, puisque tout espace de Hilbert séparable est isomorphe à $L^2[0,1]$.

Si l'on part d'un système $(e_k)_{k\geq 1}$ qui forme une base inconditionnelle dans $L^2(X,\mu)$, par exemple une base orthonormée, ou plus généralement une base Riesz dans $L^2(X,\mu)$, le problème est chercher si la propriété de base inconditionnelle est encore vraie dans les espaces $L^p(X,\mu)$. Le problème a un sens pourvu que les e_k soient dans L^p, ce qui est le cas en mesure finie quand les e_k sont bornés.

Exemples :

1) X est l'espace $[0,1]$ et μ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

Le système trigonométrique $(e_n(x) = e^{2i\pi nx}, n \in \mathbb{Z})$ forme une base dans chaque espace $L^p([0,1])$, $(1 < p < \infty)$, mais elle n'est inconditionnelle que pour $p = 2$.

2) Nous avons vu plus haut l'exemple du système de Haar, version adaptée à l'intervalle.

Le système $(\widetilde{\chi}_n)_{n\geq 0}$ forme une base orthonormée dans $L^2([0,1])$, qui aussi une base inconditionnelle dans chaque espace $L^p([0,1])$ $(1 < p < \infty)$.

3) X est l'espace $\mathbb{R}$ et μ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Le système de Haar sur $\mathbb{R}$ peut être défini sur $\mathbb{R}$. Il forme une base inconditionnelle dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $(1 < p < \infty)$.

Ce résultat s'étend aux bases d'ondelettes orthogonales $(\psi_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$, pour toute ondelette ψ suffisamment régulière et localisée à l'infini.

Référence :

Joseph Diestel : *Sequences and series in Banach spaces*, graduate texts in mathematics, Springer-Verlag.

Index