Le TCL pour une classe d'automorphismes non hyperboliques de nilvariétés

J.-P. Conze et S. Le Borgne

IRMAR, Université de Rennes I

Abstract : On the example of a non hyperbolic ergodic automorphism T of a 3-dimensional compact nilmanifold $X = N/\Gamma$, we show how the martingale method can be applied to obtain limit theorems for ergodic sums $\sum_0^{n-1} T^k f$: in this system, any Hölder function f on X is cohomologous to a martingale increment. From this representation follow the central limit theorem and its improvements and the exponential rate of decorrelation for Hölder functions.

Résumé : Sur l'exemple d'un automorphisme ergodique T non hyperbolique d'une nilvariété $X = N/\Gamma$ en dimension 3, nous montrons comment la méthode de réduction à une différence de martingale peut être appliquée à l'étude des théorèmes limites pour les sommes ergodiques $\sum_0^{n-1} T^k f$: toute fonction höldérienne f sur X est, pour l'action de cet automorphisme, homologue à un accroissement de martingale par rapport à une filtration croissante en feuilles stables. Cette représentation permet d'obtenir le théorème de la limite centrale et ses extensions, ainsi que la vitesse exponentielle de décorrélation pour les fonctions höldériennes.

Introduction

Le théorème de la limite centrale et ses extensions ont été établis pour de nombreux systèmes dynamiques de type hyperbolique ou partiellement hyperboliques. Parmi les méthodes employées, celle des martingales est l'une des plus efficaces dans les situations d'hyperbolicité partielle ou dans des cas de faible régularité pour les mesures de Gibbs. Elle repose sur des propriétés relativement simples à vérifier dans les exemples de nature algébrique et peut être appliquée à des situations où l'on ne dispose pas de partitions markoviennes.

Cette méthode permet en outre d'obtenir des résultats plus précis que le seul TCL, tels que le principe d'invariance, et donne un moyen pour étudier la régularité des cobords.

Elle peut être employée notamment dans le cas des automorphismes ergodiques du tore ([5]), dans le cas de $Sl(2, I\!R)$ ([1]), et dans le cas général des actions de groupes à un paramètre sur $Sl(2, I\!R)/Sl(2, Z\!\!Z)$ ([6]). Mentionnons également dans ce domaine les travaux de D. Dolgopyat ([2]). Dans cette note, nous illustrons la méthode en l'appliquant à un exemple simple fourni par une transformation affine sur une nilvariété compacte N/Γ.

Après la construction d'une filtration croissante, nous montrons que toute fonction höldérienne est homologue à une fonction engendrant sous l'action de la transformation un accroissement de martingale vis à vis de cette filtration. La construction donne également une vitesse de décorrélation exponentielle pour les fonctions höldériennes.

La preuve repose sur le lien entre décorrélation des fonctions régulières sous l'action d'une transformation partiellement hyperbolique et vitesse d'équirépartition des feuilles stables et instables.

L'exemple traité est un cas particulier d'automorphisme de nilvariété. Nous nous proposons de traiter ultérieurement le cas général des automorphismes ergodiques des nilvariétés.

1. Automorphismes d'une nilvariété

Considérons le groupe de Heisenberg, noté N, des matrices triangulaires

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & z \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous identifierons N à l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la loi

$$(x_1, x_2, z).(x_1', x_2', z') = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', z + z' + x_1 x_2' - x_1' x_2).$$

On peut munir N d'une distance invariante à droite (par exemple une distance définie à partir de la "jauge" $\sup(|x_1|, |x_2|, |z|^{\frac{1}{2}})$).

Soit Γ le sous-groupe discret de N formé des points à coordonnées entières. Notons $X = N/\Gamma$ l'espace homogène quotient. Cet espace est muni d'une mesure invariante notée μ, invariante par l'action de G, déduite de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$.

Etant donnée une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

à coefficients entiers de déterminant 1, nous notons S l'automorphisme du tore $\mathbb{T}^2$ associé et T la transformation définie sur N/Γ par

$$T : (x_1, x_2, z)\Gamma \to (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2, z)\Gamma.$$

Pour une fonction f sur X, nous notons Tf la composée $f \circ T$ et $S_n f = \sum_0^{n-1} T^k f$ les sommes ergodiques.

La transformation T laisse la mesure μ invariante. Remarquons qu'elle n'est que partiellement hyperbolique sur la variété X.

Nous allons considérer le sytème dynamique (X, μ, T) et montrer que les fonctions régulières sur X vérifient, pour l'action de T, un théorème de la limite centrale. Plus précisément, nous allons montrer que toute fonction höldérienne est "homologue" à une fonction engendrant, pour une filtration convenable, une différence de martingale.

Toute fonction définie sur N/Γ s'identifie à une fonction f sur $\mathbb{R}^3$, 1-périodique en z, vérifiant les relations :

$$f(x_1+n, x_2+m, z+\ell+mx_1-nx_2) = f(x_1, x_2, z), \forall (x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}^3, (n, m, \ell) \in \mathbb{Z}^3. \tag{1.1.1}$$

Un exemple de telle fonction est donné par

$$f(x_1, x_2, z) = \sin(2\pi x_1)\exp(2\pi i(x_2(2[x_1]-x_1)-z)),$$

où $[x_1]$ désigne la partie entière de x_1.

Soit f une fonction höldérienne d'ordre γ, $0 < \gamma \leq 1$, sur $X = N/\Gamma$, de constante de Hölder $C(f)$. Elle peut être représentée comme une fonction de trois variables vérifiant les relations (1.1.1), qui sur le domaine $[0,1]^3$ a la même régularité que f.

2. Réduction à une martingale

Nous décrivons d'abord la méthode de réduction à un accroissement de martingale, en nous plaçant dans le cas général d'un système dynamique $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$, où $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace probabilisé et T une transformation inversible sur cet espace préservant μ.

• Filtrations et martingales

(2.1) Définitions : Nous appellerons T-filtration une suite décroissante de sous tribus $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A}_{n+1} = T^{-1}\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Nous dirons qu'une fonction f sur X est *homologue dans $L^2(\mu)$ à une fonction g engendrant une suite d'accroissements de martingale (renversée), s'il existe une T-filtration $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{A}$ et des fonctions h et g dans $L^2(\mu)$ telles que*

$$f = g + Th - h, \tag{2.1.1}$$

et g est $\mathcal{A}_0$-mesurable et vérifie $\mathbb{E}(g|\mathcal{A}_1) = 0$.

La suite des sommes partielles $(\sum_0^{n-1} T^k g)_{n\geq 1}$ forme alors, pour la filtration $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, une martingale renversée et la variance $\sigma^2(f)$ associée au processus $(T^n f)$ est égale à $\|g\|_2^2$.

Rappelons le résultat classique suivant (cf. Hall et Heyde [4]) :

(2.2) Théorème : *Si une fonction f est homologue dans $L^2(\mu)$ à une fonction g engendrant une suite d'accroissements de martingale et si la fonction f n'est pas un cobord, elle vérifie le TCL avec la variance $\|g\|_2^2$, le TCL fonctionnel et le théorème du logarithme itéré.*

(2.3) Remarques : 1) En faisant la construction donnée dans la suite de l'article pour T^{-1}, on obtient une représentation de la forme (2.1.1) avec g engendrant une martingale "directe", ce qui est le cadre du théorème 2.2. On peut également utiliser la propriété de martingale "renversée", au moins pour le TCL et le théorème fonctionnel.

2) Supposons que la fonction f vérifie les conditions de la définition (2.1). Si f est un cobord, $f = Th_0 - h_0$, avec h_0 **mesurable**, alors la loi limite de $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n f(.)\right)$ est dégénérée et la variance correspondante du processus $(T^n f)$ est nulle. La fonction g de (2.1.1) est alors nulle. On a donc, à une constante près, $h_0 = h$, ce qui établit que f est un cobord dans L^2.

Le procédé introduit par Gordin ([3]) pour montrer que f vérifie (2.1) consiste à établir les conditions (2.4.1) et (2.4.2) du théorème suivant.

(2.4) Théorème : *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique ergodique inversible, $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une T-filtration dans $\mathcal{A}$, f une fonction dans $L^2\,(m\mu)$ telle que $\int_X f\, d\mu = 0$ et*

$$\sum_{n\geq 0} ||\mathbb{E}\,(f|\mathcal{A}_n)\,||_2 < \infty, \tag{2.4.1}$$

$$\sum_{n\geq 0} ||f - \mathbb{E}\,(f|\mathcal{A}_{-n})\,||_2 < \infty. \tag{2.4.2}$$

Alors f est homologue dans $L^2(\mu)$ à une fonction g engendrant une suite d'accroissements de martingale (renversée).

Revenons maintenant au système dynamique décrit au paragraphe 1. Pour mettre en oeuvre la méthode, on doit démontrer le résultat suivant dont la preuve fera l'objet des paragraphes 3 et 4 :

(2.5) Théorème : *Pour le système dynamique $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$, il existe une T-filtration $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{A}$ telle que, pour toute fonction höldérienne sur X d'intégrale nulle, les conditions (2.4.1) et (2.4.2) soient vérifiées.*

En particulier, toute fonction höldérienne sur X est homologue dans $L^2(\mu)$ à une fonction engendrant une suite d'accroissements de martingale (renversée).

(2.6) Corollaire : *Une fonction f höldérienne sur X qui n'est pas un cobord vérifie sous l'action de T le TCL, le TCL fonctionnel.*

3. Partition croissante en feuilles stables

Soient α, α^{-1}, avec $\alpha > 1$, les valeurs propres de la matrice A. L'automorphisme hyperbolique S du tore $\mathbb{T}^2$ associé à A admet une partition markovienne en rectangles, déterminant une partition $\mathcal{R}$ de $[0,1]^2$ en quadrilatères ou triangles.

Notons $\mathcal{P}$ la partition de $[0,1]^3$ définie par :

$$\mathcal{P} = \{R \times I, R \in \mathcal{R}, I \in \{[0, \frac{1}{2}[, [\frac{1}{2}, 1[\}\}.$$

Le cube $[0,1]^3$ est un domaine fondamental pour l'action de Γ sur N. La partition $\mathcal{P}$ définit donc de manière naturelle une partition de la variété $X = N/\Gamma$, ainsi qu'une partition Γ-périodique de N. Nous identifierons ces trois objets et les désignerons par $\mathcal{P}$.

Pour toute partition $\mathcal{Q}$ et tout point x de X, notons $\mathcal{Q}(x)$ l'élément de $\mathcal{Q}$ contenant x. Soient $\mathcal{P}_0^\infty$ la partition définie par

$$\mathcal{P}_0^\infty(x) = \mathcal{P}(x) \cap \ T^{-1}\mathcal{P}(Tx) \ \cap \cdots, x \in X.$$

Montrons que les éléments de la partition $\mathcal{P}_0^\infty$ sont formés de morceaux de feuilles contractantes pour la transformation T, ce qui entranera en particulier que la partition $\mathcal{P}$ est génératrice pour le système $(N/\Gamma, T)$. La filtration $(\mathcal{A}_n = T^{-n}\mathcal{P}_0^\infty)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une filtration de K-système.

(3.1) Proposition : *Pour presque tout point $(x_1, x_2, z) \in N/\Gamma$, l'inclusion suivante est vérifiée :*

$$\mathcal{P}_0^\infty((x_1, x_2, z)) \subset \{(t, \alpha t, 0).(x_1, x_2, z) = (x_1 + t, x_2 + \alpha t, z + t(x_2 - \alpha x_1)), t \in \mathbb{R}\}. \quad (3.1)$$

Preuve : Soient (x_1, x_2, z) et (x_1', x_2', z') deux points de N appartenant au même élément de $\mathcal{P}_0^\infty$, i.e. tels que :

$$\mathcal{P}(T^n(x_1, x_2, z)) = \mathcal{P}(T^n(x_1', x_2', z')), \ \forall n \geq 0.$$

On a donc :

$$\mathcal{R}(S^n(x_1, x_2)) = \mathcal{R}(S^n(x_1', x_2')), \ \forall n \geq 0.$$

L'ensemble $\bigcap_{n\geq 0} S^{-n}\mathcal{R}(S^n(x_1, x_2))$ étant contenu dans la droite passant par (x_1, x_2) contractante pour S, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(x_1', x_2', z') = (x_1 + t, x_2 + \alpha t, z').$$

Supposons que (x_1, x_2, z) soit d'orbite dense (d'après l'ergodicité de T, l'ensemble des points d'orbite dense est de mesure pleine). Soit $s \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ avec $s \neq 0$.

Pour obtenir l'inclusion (3.1) il suffit de montrer que $\mathcal{P}_0^\infty((x_1,x_2,z))$ n'est pas égal à $\mathcal{P}_0^\infty((t,\alpha t,0).(x_1,x_2,z+s))$.

Prenons $r\in[0,1]$ tel que $r+s/2$ n'appartiennent pas à $[0,1]$. Les points $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},r)$ et $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},r+s/2)$ sont séparés par $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}((\frac{1}{2},\frac{1}{2},r))\neq\mathcal{P}((\frac{1}{2},\frac{1}{2},r+s/2))$. Comme (x_1,x_2,z) est d'orbite dense, il existe une suite (n_k) telle que $(T^{n_k}(x_1,x_2,z))$ converge, modulo Γ, vers $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},r)$.

Pour $\varepsilon>0$ assez petit et k assez grand, si $d(T^{n_k}(x_1,x_2,z),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},r))<\varepsilon$, pour tout point $(u,v,w)\in N/\Gamma$ tel que $d(T^{n_k}(x_1,x_2,z),(u,v,w))<\varepsilon$, on a $(u,v,w+s)\notin\mathcal{P}(T^{n_k}(x_1,x_2,z))$.

Les orbites de (x_1,x_2,z) et $(t,\alpha t,0).(x_1,x_2,z)$ sont adjacentes. Donc, à partir d'un certain rang k_0, on a $d(T^{n_k}(x_1,x_2,z),T^{n_k}((t,\alpha t,0).(x_1,x_2,z)))<\varepsilon$. On a alors :

$$T^{n_k}((t,\alpha t,0).(x_1,x_2,z+s))=T^{n_k}((t,\alpha t,0).(x_1,x_2,z)).(0,0,s)\notin\mathcal{P}(T^{n_k}(x_1,x_2,z))$$

et donc $(t,\alpha t,0)(x_1,x_2,z+s)\notin\mathcal{P}_0^\infty(x_1,x_2,z)$.

□

Longueur des feuilles

Les éléments de $\mathcal{P}$ étant convexes, pour tout x de N/Γ, l'ensemble $\mathcal{P}_0^\infty(x)$ est un segment.

Nous avons $\mathcal{A}_n(x)=T^{-n}\mathcal{A}_0(T^n x)=\mathcal{P}_n^\infty(x)=T^{-n}\mathcal{P}_0^\infty(T^n x)$.

Notons h_t^s (ou simplement h_t) l'élément $(t,\alpha t,0)$ de N, $I(n,x)$ l'intervalle de $\mathbb{R}$ défini (presque sûrement) par

$$I(n,x)=\{t\in\mathbb{R}:h_t^s x\in\mathcal{P}_n^\infty(x)\}$$

et $\ell(I(n,x))$ sa longueur.

Pour pouvoir appliquer les propriétés d'équirépartition des feuilles dilatées, nous devons minorer la longueur des petites feuilles $\ell(I(0,x))$.

(3.2) Lemme : *Soit β un réel supérieur à 1. Il existe $K>0$ tel que*

$$\mu\{x:\ell(I(0,x))\le 2\beta^{-n}\}\le K\beta^{-n}.$$

Preuve : Soit δ tel que $1<\delta<\alpha$. Notons E_n l'ensemble des x tels que, pour tout $k\ge 0$, la courbe $\{h_r x:|r|\le\beta^{-n}\delta^{-k}\}$ ne rencontre pas $\partial\mathcal{P}=\cup_{P\in\mathcal{P}}\partial P$.

Il existe $K_0>0$ tel que $\mu({}^cE_n)\le K_0\beta^{-n}$. En effet

$${}^cE_n\subset\bigcup_{k\ge 0}\{x:\{h_r x:|r|\le\beta^{-n}\delta^{-k}\}\cap\partial\mathcal{P}\}\neq\emptyset\}.$$

Comme $\partial\mathcal{P}$ est C^1 par morceaux, il existe $K > 0$ tel que, pour tout $k \geq 0$,

$$\mu(\{x : \{h_r x : |r| \leq \beta^{-n}\delta^{-k}\} \cap \partial\mathcal{P}\} \neq \emptyset\}) \leq K\delta^{-k}\beta^{-n}.$$

On en déduit l'inégalité

$$\mu({}^c E_n) \leq K\beta^{-n} \sum_{k\geq 0} \delta^{-k}.$$

Supposons maintenant que x appartienne E_n. Nous avons alors pour tout k

$$\{h_{\alpha^k r} x : -\beta^{-n}\delta^{-k} \leq r \leq \beta^{-n}\delta^{-k}\} \subset T^{-k}\mathcal{P}(T^k x).$$

Comme $\mathcal{P}_0^\infty = \bigcap_{k\geq 0} T^{-k}\mathcal{P}(T^k x)$, ceci entrane que

$$\ell(I(0,x)) \geq \inf_{k\geq 0} 2\alpha^k\delta^{-k}\beta^{-n} \geq 2\beta^{-n}$$

et donc que l'ensemble $\{x : \ell(I(0,x)) \leq 2\beta^{-n}\}$ est inclus dans ${}^c E_n$.

$\square$

• Probabilités conditionnelles

Les partitions $\mathcal{P}_n^\infty$ sont mesurables au sens de Rokhlin ([6]). Il existe donc des familles de probabilités conditionnelles $(\mu_P)_{P\in\mathcal{P}_n^\infty}$ permettant d'exprimer l'espérance conditionnelle par rapport aux tribus $\mathcal{A}_n$: pour toute fonction f intégrable, pour μ-presque tout x,

$$I\!\!E(f|\mathcal{A}_n)(x) = \int_{\mathcal{P}_n^\infty(x)} f(y)\ d\mu_{\mathcal{P}_n^\infty(x)}(y).$$

(3.3) Proposition : *Les probabilités conditionnelles s'expriment, pour toute fonction f intégrable, pour μ-presque tout x, sous la forme :*

$$I\!\!E(f|\mathcal{A}_n)(x) = \frac{1}{\ell(I(n,x))} \int_{I(n,x)} f(h_t^s T^n x)\ dt. \qquad (3.3.1)$$

La valeur de $I\!\!E(f|\mathcal{A}_n)(x)$ est donc liée à la répartition des morceaux de feuilles stables dans X, si la longueur des éléments de la partition $\mathcal{P}_n^\infty$ est assez grande, ce qui résulte du lemme 3.2.

4. Vitesse d'équirépartition de sous-variétés linéaires dans N/Γ

(4.0) Pour une fonction régulière sur le tore de dimension d, on peut établir une vitesse de convergence des intégrales le long d'un sous-groupe à un paramètre défini par un vecteur v, à partir du type diophantien du vecteur v. Un résultat analogue peut être obtenu sur la nilvariété N/Γ. Notons cependant que les feuilles stables ne sont pas les orbites d'un groupes à un paramètre.

Dans ce qui suit, α est un nombre irrationnel. Notons, pour $y \in \mathbb{R}$, $((y)) = \min_{n\in\mathbb{Z}} |y-n|$. Rappelons que α est dit de **type** η_0 si, pour tout $\eta > \eta_0$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier $q > 0$, on ait :

$$q^\eta((q\alpha)) \geq C. \tag{4.0.1}$$

Nous allons obtenir une vitesse en utilisant l'**inégalité de Van der Corput** :

(4.1) Lemme : *Etant donnés des nombres complexes $v_1, \cdots, v_N$, pour tout entier $H \in [1, N]$, nous avons :*

$$H^2|\sum_{n=1}^N v_n|^2 \leq H(N+H-1)\sum_{n=1}^N |v_n|^2 + 2(N+H-1)\sum_{h=1}^{H-1}(H-h)\,\Re e(\sum_{n=1}^{N-h} v_n\overline{v_{n+h}}).$$

En particulier, pour tous réels $\theta_1, \cdots, \theta_N$, nous avons :

$$|\sum_{n=1}^N e^{i\theta_n}|^2 \leq 2N^2H^{-1} + 4NH^{-1}\sum_{h=1}^{H-1}|\sum_{n=1}^{N-h} e^{i(\theta_n-\theta_{n+h})}|. \tag{4.1.1}$$

(4.2) Théorème : *Soit α de type η_0 fini. Pour toute fonction f höldérienne d'ordre $\gamma \leq 1$ sur N/Γ d'intégrale nulle et pour tout $\eta > \eta_0$, il existe une constante C telle que, uniformément en x_1, x_2, z, β :*

$$|\int_0^N f(x_1+t, x_2+\alpha t, z+t\beta)\,dt| \leq CN^\theta.$$

avec

$$\theta = 1 - \frac{\gamma^2}{\eta(4+\gamma)+4}$$

Preuve : 1) Notons $F_L(.) = \sum_{k=-L}^L (1-\frac{|k|}{L})e^{2\pi ik.}$ le noyau de Fejér d'ordre L.

Rappelons que, si ϕ est une fonction 1-périodique et höldérienne d'ordre γ et de constante de Hölder $C(\phi)$, nous avons :

$$\|\phi - \phi * F_L\|_\infty \leq C(\phi) L^{-\gamma}, \tag{4.2.1}$$

et, pour tout $p \neq 0$, le coefficient de Fourier ϕ_p de ϕ d'ordre p vérifie :

$$|\phi_p(\phi)| \leq C(\phi)|p|^{-\gamma}. \tag{4.2.2}$$

2) Pour $p \in \mathbb{Z}$, soit $f_p(x_1, x_2)$ le coefficient de Fourier d'ordre p de f par rapport à la variable z,

$$f_p(x_1, x_2) = \int_0^1 f(x_1, x_2, z)\; e^{-2\pi i p z}\; dz.$$

En identifiant les développements en série de Fourier, nous obtenons, d'après les relations (1.1.1), pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$f_p(x_1 + n, x_2 + m) = e^{2\pi i p(m x_1 - n x_2)} f_p(x_1, x_2),\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \tag{4.2.3}$$

D'après les remarques précédentes, nous avons :

$$\|f_p\|_\infty \leq C(f)|p|^{-\gamma},$$

$$\|f - f * F_L\|_\infty \leq C(f) L^{-\gamma},$$

la convolution par le noyau F_L étant prise au sens de la variable z.

Pour tout entier p, f_p en restriction à $[0,1]^2$ est, comme f, γ-höldérienne de constante $C(f_p) \leq C(f)$.

Pour x_1 fixé, la fonction $x_2 \to f_p(x_1, x_2) e^{-2i\pi p x_1 x_2}$ est 1-périodique. On peut donc développer f_p sous la forme :

$$f_p(x_1, x_2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{k,p}(x_1) e^{2i\pi x_2 (k + p x_1)}, \tag{4.2.4}$$

où les fonctions $c_{k,p}(x_1)$ sont définies par :

$$c_{k,p}(x_1) = \int_0^1 f_p(x_1, x_2) e^{-2i\pi p x_1 x_2}\; e^{-2i\pi k x_2}\; dx_2.$$

La différence des valeurs de la fonction $x_2 \to f_p(x_1, x_2) e^{-2i\pi p x_1 x_2}$ entre deux points $x_2 + h$ et x_2 de $[0,1]$ est majorée par $C(f_p)|h|^\gamma + \|f_p\|_\infty |p||h|$ et donc, d'après ce qui précède, par

$$C(f)|h|^\gamma + C(f)|p|^{-\gamma}|p||h| \leq C(f)(1 + |p|^{1-\gamma})|h|^\gamma.$$

Ceci fournit une majoration des coefficients $c_{k,p}(x_1)$ de la forme :

$$|c_{k,p}(x_1)| \leq C(f)(1+|p|^{1-\gamma})|k|^{-\gamma},\ \forall x_1 \in [0,1].$$

Pour un ordre L du noyau de Fejér appliqué à la fonction $x_2 \to f_p(x_1,x_2)e^{-2i\pi p x_1 x_2}$, l'erreur d'approximation est en

$$C(f)(1+|p|^{1-\gamma})L^{-\gamma}.$$

Nous avons ainsi représenté f_p par le dévelopement en série (4.2.4) avec l'estimation suivante :

$$|f_p(x_1,x_2) - \sum_{k=-L}^{L} (1-\frac{|k|}{L})\ c_{k,p}(x_1)e^{2i\pi x_2(k+px_1)}| \leq C(f)(1+|p|^{1-\gamma})L^{-\gamma}, \forall x_1 \in [0,1].$$

On note que la majoration est uniforme en x_2 sur $\mathbb{R}$.

3) Pour la composante f_0 la majoration sur le tore quotient, est classique. En retranchant f_0 de f, nous pouvons supposer que cette composante est nulle.

En écrivant

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2,z) &= f(x_1,x_2,z) - \sum_{0<|p|\leq L_1} (1-\frac{|p|}{L_1}) f_p(x_1,x_2)e^{2\pi i p z} \\
&+ \sum_{0<|p|\leq L_1} (1-\frac{|p|}{L_1})\ [f_p(x_1,x_2)e^{2\pi i p z} - \sum_{k=-L_2}^{L_2} (1-\frac{|k|}{L_2})\ c_{k,p}(x_1)e^{2i\pi x_2(k+px_1)}e^{2\pi i p z}] \\
&+ \sum_{0<|p|\leq L_1} (1-\frac{|p|}{L_1})\ [\sum_{k=-L_2}^{L_2} (1-\frac{|k|}{L_2})\ c_{k,p}(x_1)e^{2i\pi x_2(k+px_1)}e^{2\pi i p z}],
\end{aligned}$$

et en utilisant (1.1.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&|\int_0^N f(x_1+t, x_2+\alpha t, z+\beta t)\ dt| \\
&= |\sum_{n=0}^{N-1} \int_0^1 f(x_1+t, x_2+\alpha(t+n), z+\beta(t+n) - n(x_2+\alpha(t+n))\ dt| \\
&\leq C(f)NL_1^{-\gamma} + C(f)NL_1^{2-\gamma}L_2^{-\gamma} \\
&\quad + |\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{0<|p|\leq L_1, |k|\leq L_2} (1-\frac{|k|}{L_2})\ \int_0^1 c_{k,p}(x_1+t)\ e^{2\pi i X_1}e^{2\pi i X_2}e^{2\pi i p z}\ dt|,
\end{aligned}$$

avec d'après (4.2.4),

$$X_1 = (k + p(x_1 + t))(n\alpha + x_2 + \alpha t).$$
$$X_2 = -p\alpha n^2 + p(-x_2 - \alpha t + \beta)n + p\beta t$$

Ainsi $X_1 + X_2$ est de la forme $p\alpha n^2 + \lambda_1 n + \lambda_2$, avec λ_1 et λ_2 ne dépendant pas de n. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}&|\int_0^N f(x_1 + t, x_2 + \alpha t, z + \beta t)\, dt| \\ &\leq CNL_1^{-\gamma} + CNL_1^{2-\gamma} L_2^{-\gamma} + \sum_{0<|p|\leq L_1, |k|\leq L_2} \|c_{k,p}\|_\infty |S(N,k,p)|,\end{aligned}$$

avec $S(N,k,p) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i(-p\alpha n^2 + \lambda_1 n)}$.

Fixons un nombre $\eta > \eta_0 \geq 1$. Nous pouvons majorer les sommes $S(N,k,p)$ à l'aide de l'inégalité de Van der Corput (4.1.1). Nous obtenons d'après (4.0.1), pour une constante C la majoration suivante ne dépendant que de α (la majoration dans le module figurant à droite dans (4.1.1) est uniforme en x_1, x_2, z) :

$$\begin{aligned}|S(N,k,p)|^2 \leq& 2N^2 H^{-1} + 4NH^{-1} \sum_{h=1}^{H-1} \frac{1}{|\sin(2\pi ph\alpha)|} \\ &\leq 2N^2 H^{-1} + 2C^{-1} NH^{-1} H^{\eta+1} p^\eta;\end{aligned}$$

d'où, en choisissant $H = [C^{\frac{1}{1+\eta}} N^{\frac{1}{1+\eta}} p^{-\frac{\eta}{1+\eta}}]$, la majoration, pour une constante C' :

$$|S(N,k,p)| \leq C' N^{1-\frac{1}{2+2\eta}} p^{\frac{\eta}{2+2\eta}}.$$

Compte-tenu de la majoration des $c_{p,k}$, il en résulte alors :

$$\begin{aligned}&|\int_0^N f(x_1 + t, x_2 + \alpha t, z + \beta t)\, dt| \leq \\ &C[NL_1^{-\gamma} + NL_1^{2-\gamma} L_2^{-\gamma} + L_1 L_2 L_1^{1-\gamma} L_2^{-\gamma} N^{1-\frac{1}{2\eta+2}} L_1^{\frac{\eta}{2+2\eta}}],\end{aligned}$$

Prenons $L_1 = [N^{\alpha_1}]$, $L_2 = [N^{\alpha_2}]$, avec :

$$\alpha_1 = \frac{\gamma}{\eta(4+\gamma)+4},\ \alpha_2 = \frac{2}{\eta(4+\gamma)+4}.$$

Nous obtenons :

$$|\int_0^N f(x_1 + t, x_2 + \alpha t, x_2 + \beta t)\, dt| \leq C''\ N^{1-\frac{\gamma^2}{\eta(4+\gamma)+4}}.$$

□

Rappelons que tout nombre algébrique α est de type 1 (théorème de W.M. Schmidt), i.e. vérifie, pour tout $\eta > 1$ et pour une constante $C(\eta)$,

$$((q\alpha)) \geq C(\eta)|q|^{-\eta}, \forall q \in \mathbb{N}.$$

Le corollaire suivant donne une vitesse d'équirépartition pour les feuilles instables.

(4.3) Corollaire : *Pour toute fonction f höldérienne d'ordre $\gamma \leq 1$ sur N/Γ d'intégrale nulle et pour tout α algébrique, il existe des constantes C et θ, $\theta \in]0,1[$, telles que*

$$|\int_0^N f(x_1 + t, x_2 + \alpha t, z + t(x_2 - \alpha x_1))\ dt| \leq CN^\theta. \tag{4.3.1}$$

(4.3) Preuve du théorème 2.5 : Soit f une fonction höldérienne d'ordre γ sur N/Γ, d'intégrale nulle. Définissons l'ensemble V_n par

$$V_n = \{x \in X\ :\ \ell(I(0, T^n x)) \geq 2\beta^{-n}\},$$

où $\beta < 1$ est choisi tel que $\beta\alpha > 1$.

D'après le lemme (3.2), son complémentaire ${}^cV_n$ est de mesure inférieure à $K\beta^{-n}$. On a donc :

$$\int_{{}^cV_n} |\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)(x)|^2\ d\mu(x) \leq ||f||_4^2 (K\beta^{-n})^{\frac{1}{2}}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x fixé dans V_n. Notons $]\varepsilon_{1,n}(x), \varepsilon_{2,n}(x)[$, ou pour simplifier $]\varepsilon_{1,n}, \varepsilon_{2,n}[$, l'intervalle $I(0, T^n x)$. Nous avons $\varepsilon_{2,n} - \varepsilon_{1,n} = \ell(I(0, T^n x)) \geq 2\beta^{-n}$.

On peut donc appliquer l'inégalité (4.3.1). On a, pour une constante $C(f)$, pour tout $x \in V_n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)(x) &= \frac{1}{\alpha^n(\varepsilon_{2,n} - \varepsilon_{1,n})} \Big| \int_{]\varepsilon_{1,n}\alpha^n, \varepsilon_{2,n}\alpha^n[} f(h_a^s T^{-n} x)\ da \Big| \\ &\leq C(f)[\alpha^n(\varepsilon_{2,n} - \varepsilon_{1,n})]^{\theta - 1} \leq C(f)(\alpha\beta)^{n(\theta-1)} \end{aligned}$$

Posons $\eta = (\alpha\beta)^{1-\theta}$. Nous avons : $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)(x) \leq C(f)\eta^{-n}$ et donc

$$\int_{V_n} |\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)(x)|^2\ d\mu(x) \leq (C(f)\eta^{-n})^2.$$

La convergence de la série $\sum_{n>0} ||\mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)||_2$ est ainsi prouvée.

La convergence de la série $\sum_{n<0} ||f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_n)||_2$ est une conséquence de la régularité de f et du fait que les atomes de $\mathcal{A}_n$ sont des morceaux de feuilles contractées.

□

5. Vitesse de décorrélation

La vitesse de mélange exponentielle (ou de décorrélation) peut être établie comme conséquence de la propriété d'équirépartition des feuilles instables.

(5.1) Théorème : *Soient f, g deux fonctions höldériennes sur N/Γ. Il existe $C > 0$ et $\beta \in]0,1[$ tels que l'on ait*

$$|\langle T^n f, g\rangle - \mu(f)\mu(g)| \leq C\beta^{|n|}. \tag{5.1.1}$$

Preuve : Reprenons la filtration $(\mathcal{A}_n)$ construite plus haut. Pour toute fonction h intégrable, nous avons l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}(T^n h|\mathcal{A}_\ell) = T^n \mathbb{E}(h|\mathcal{A}_{\ell-n}), \forall \ell \in \mathbb{Z}. \tag{5.1.2}$$

Nous avons montré plus haut qu'il existe $\gamma \in]0,1[$ et $K > 0$ tels que

$$||f - \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_k)||_2 < K\gamma^k, \ \forall k \geq 0.$$

Ceci implique l'inégalité :

$$|\langle f, T^{-n}g\rangle - \langle \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_k), T^{-n}g\rangle| < K\gamma^k ||g||_2.$$

Nous avons d'autre part, d'après (5.1.2), les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_k), T^n g\rangle &= \int_X \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_k)\mathbb{E}(T^n g|\mathcal{A}_k)\ d\mu \\ &= \int_X \mathbb{E}(f|\mathcal{A}_k)\ T^n\mathbb{E}(g|\mathcal{A}_{k-n})\ d\mu \\ &\leq ||f||_2 ||\mathbb{E}(g|\mathcal{A}_{k-n})||_2.\end{aligned}$$

Il en résulte :

$$|\langle f, T^n g\rangle| \leq K\gamma^k ||g||_2 + ||f||_2 ||\mathbb{E}(g|\mathcal{A}_{k-n})||_2.$$

Lorsque g est d'intégrale nulle et höldérienne, compte-tenu de la décroissance exponentielle des diamètres des atomes des partitions, il existe $D > 0$ et $\eta \in]0,1[$ tels que

$$||\mathbb{E}(g|\mathcal{A}_\ell)||_2 \leq D\eta^\ell, \ \forall \ell > 0.$$

En prenant $k = [n/2]$, nous obtenons :

$$|\langle f, T^{-n}g\rangle| \leq K\gamma^{[n/2]}||g||_2 + ||f||_2 ||\mathbb{E}(g|\mathcal{A}_{[-n/2]})||_2;$$

d'où l'inégalité de décorrélation (5.1.1).

□

Remarques 1) En tenant compte du fait que α est un nombre quadratique, l'inégalité de Hardy et Littlewood pour les sommes de Weyl peut être utilisée pour obtenir un majorant plus précis de la vitesse d'équirépartion des feuilles stables et par là une meilleure estimation de la vitesse de décorrélation pour les fonctions höldériennes.

2) Soit f höldérienne telle que $f = h - Th$, pour une fonction h mesurable. La loi limite de $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n f$ est alors dégénérée et la représentation (2.1.1) donnée par le théorème 2.5 pour f se réduit au terme de cobord, qui est donc de carré intégrable. On peut alors en déduire, comme dans [1] ou [5], la régularité höldérienne de h.

Bibliographie

[1] Conze (J.-P.), Le Borgne (S.) : Méthode de martingales et flot géodésique sur une surface de courbure constante négative, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (2001), **21**, p. 421-441.

[2] Dolgopyat (D.) : Limit theorems for partially hyperbolic systems. Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), no. 4, p. 1637-1689.

[3] Gordin (M. I.) : On the central limit theorem for stationary processes, (Dokl. Akad. Nauk SSSR), Soviet Math. Dokl., 10, no 5 (1969), p. 1174-1176.

[4] Hall (P.), Heyde (C.C.) : *Martingale limit theory and its applications*, Academic Press, New York, 1980.

[5] Le Borgne (S.) : Limit theorems for non-hyperbolic automorphisms of the torus, Israel J. of Math., 109 (1999), p. 61-73.

[6] Le Borgne (S.) : Principe d'invariance pour les flots diagonaux sur $SL_d(\mathbb{R})/SL_d(\mathbb{Z})$, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 38 (2002), no. 4, p. 581-612.

[6] Rokhlin (V.A.) : On the fundamental ideas of measure theory, Translations AMS, Series 1, 10, 1-54.

Jean-Pierre Conze
conze@univ-rennes1.fr

Stéphane Le Borgne
sleborgn@univ-rennes1.fr

IRMAR, Université de Rennes I,
Campus de Beaulieu,
35042 Rennes Cedex, France