Marches en milieu aléatoire et mesures quasi-invariantes pour un système dynamique

Jean-Pierre Conze et Yves Guivarc'h

Université de Rennes I

Abstract : *The invariant measures for a Markovian operator corresponding to a random walk, in a random stationary one-dimensional environment defined by a dynamical system, are quasi-invariant measures for the system. We discuss the construction of such measures in the general case and show unicity, under some assumptions, for a rotation on the circle.*

Résumé : *Les mesures invariantes pour un opérateur markovien associé à une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, en milieu aléatoire stationnaire défini par un système dynamique, sont des mesures quasi-invariantes pour ce système. Nous discutons la construction de telles mesures dans le cas général et nous montrons leur unicité, sous certaines conditions, quand le système est une rotation sur le cercle.*

Volume spécial de Colloquium Mathematicum, à la mémoire d'Anzelm Iwanik, Professeur à l'Université de Technologie de Wroclaw, Pologne

Plan de l'article :

1. Introduction et notations

Marche en milieu aléatoire stationnaire

La construction de mesures invariantes pour les opérateurs markoviens considérés dans ce travail est motivée par l'étude de marches aléatoires "simples" décrivant le mouvement d'une particule qui se déplace sur $\mathbb{Z}$ de la façon suivante : si la particule se trouve en k à l'instant n, à l'instant $n+1$ elle saute en $k+1$ avec la probabilité p_k et en $k-1$ avec la probabilité q_k, $(p_k + q_k = 1,\ \forall k \in \mathbb{Z})$.

Sous l'hypothèse d'homogénéité statistique (i.e. si la suite (p_k, q_k) est un processus stationnaire), nous pouvons modéliser ce milieu aléatoire stationnaire sous une forme équivalente permettant l'utilisation des méthodes de la théorie ergodique :

Soit (X, μ, T) un système dynamique (inversible), i.e. la donnée d'un espace X muni d'une mesure μ et d'une transformation inversible T de X dans lui-même, laissant la mesure μ invariante. Soient p, q des fonctions strictement positives sur X telles que $p(x) + q(x) = 1$, $\forall x \in X$. Pour un $x \in X$, nous définissons les probabilités p_k, q_k par $p_k = p(T^k x)$, $q_k = q(T^k x)$. Le choix d'un élément $x \in X$ revient à fixer un "environnement".

La modélisation décrite précédemment privilégie une mesure μ invariante par T. Nous pouvons également nous placer dans un contexte topologique de façon à pouvoir considérer différentes mesures de référence pour les processus envisagés.

Nous supposons pour cela que X est un espace métrique compact X et T une application inversible et continue de X dans lui-même.

Etant données p et q deux fonctions continues sur X telles que, pour tout $x \in X$, $p(x), q(x) > 0$ et $p(x) + q(x) = 1$, considérons sur l'espace X la marche qui fait passer de x à Tx, resp. $T^{-1}x$, avec la probabilité $p(x)$, resp. $q(x)$.

L'opérateur markovien correspondant est défini par

$$Pf(x) = p(x)f(Tx) + q(x)f(T^{-1}x),\ \forall x \in X. \tag{$*$}$$

Afin de préciser l'interprétation de cet opérateur, notons $\Sigma = \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ l'espace des sauts de la particule, $\epsilon \in \Sigma$ une suite de sauts, $S_n(\epsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i \in \mathbb{Z}$ la position de la particule partant de 0 à l'instant n. Identifions à Σ l'espace des trajectoires partant de 0 et notons $\mathbb{P}_x$ la probabilité définie sur Σ par

$$\mathbb{P}_x(\epsilon_0 = a_0, \cdots, \epsilon_{n-1} = a_{n-1}) = p_{a_0}(x) p_{a_1}(T^{S_1}x) \cdots p_{a_{n-1}}(T^{S_{n-1}}x),$$

avec $p_1 = p$ et $p_{-1} = q$.

Si l'environnement $x \in X$ est initialement distribué suivant la probabilité ν_0, la loi de "l'environnement vu de la particule" à l'instant n est définie sur $\mathcal{C}(X)$ par

$$\begin{aligned} \nu_n(f) &= \int_X \int_\Sigma f(T^{S_n(\epsilon)}x)\ d\mathbb{P}_x(\epsilon)\ d\nu_0(x) \\ &= \int_X P^n f(x)\ d\nu_0(x) = (P^n \nu_0)(f). \end{aligned}$$

Les valeurs d'adhérence de la suite $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \nu_k)_{n \geq 1}$ décrivent alors les valeurs moyennes des "quantités observées". Elles ne sont pas en général T-invariantes, même si $\nu_0 = \mu$ est une mesure T-invariante. Cependant, elles caractérisent un nouveau milieu, dit "effectif", qui gouverne le comportement asymptotique de la particule.

On est ainsi amené à s'intéresser à la convergence de la suite $(\frac{1}{n}\sum_0^{n-1} P^k\mu)_{n\geq 1}$ vers une mesure ν P-invariante et à essayer de décrire les propriétés de ν, c'est-à-dire les propriétés du "milieu effectif" (X, T, ν).

L'étude des marches en milieu aléatoire a fait l'objet de nombreux travaux (citons notamment [1, 12, 13, 14, 17, 19, 23, 26]). Signalons également un travail récent [24] de Ya. Sinai sur les marches aléatoires "simples" sur le tore.

Nous n'aborderons ici que la question des mesures P-invariantes, particulièrement dans le cas des sous-shift de type fini et quand (X, T) est une rotation sur le cercle. Après quelques rappels (§2), nous précisons dans le §3 le lien entre l'équation $P\nu = \nu$ et l'équation de quasi-invariance $T^{-1}\nu = h\nu$, où $h = \frac{p}{Tq}$. Le §4 porte sur une étude de l'équation $T^{-1}\nu = h\nu$, dans le cas général d'une fonction h continue, avec dans le §5 une étude plus précise quand T est une rotation sur le cercle et $\log h$ est à variation bornée. Enfin dans le §6, nous donnons une application à la recherche d'une mesure invariante pour un opérateur de transition correspondant à des transitions aléatoires sur le $\mathbb{R}$.

Nous remercions vivement le rapporteur pour sa lecture attentive de ce travail et ses nombreuses suggestions de rédaction.

Notations

L'opérateur de composition par T sera encore noté T. Toutes les mesures considérées seront, sauf mention contraire, des mesures de probabilité. Pour une mesure ν sur X, nous notons $T\nu(A) = \int T1_A \, d\nu = \nu(T^{-1}A)$. Nous avons $T(g\nu) = T^{-1}g\, T\nu$, pour toute fonction g mesurable bornée.

Pour toute fonction $u > 0$ sur X, notons

$$u_k(x) = \begin{cases} \Pi_{i=0}^{k-1} u(T^i x), & \text{pour } k \geq 1, \\ 1, & \text{pour } k = 0, \\ \Pi_{i=1}^{k} u^{-1}(T^{-i}x), & \text{pour } k < 0. \end{cases}$$

Nous avons $u_k(x) = \left(u_{-k}(T^k x)\right)^{-1}$ et la relation de "cocycle multiplicatif" : $u_{n+p}(x) = u_n(x)\ u_p(T^n x), \forall n, p \in \mathbb{Z}$.

Si ν est une mesure quasi-invariante telle que $T^{-1}\nu = h\,\nu$, pour une fonction h, la suite des dérivées de Radon-Nikodym $(dT^{-n}\nu/d\nu)_{n\geq 0}$ est un exemple de cocycle multiplicatif et, avec la notation précédente, on peut écrire : $T^{-n}\nu = h_n\nu$.

Une fonction ϕ est appelée cobord (additif) pour la transformation T, s'il existe ψ telle que $\phi = T\psi - \psi$. On précisera qu'il s'agit d'un cobord au sens continu, intégrable ou mesurable, suivant que ψ est continue, intégrable ou simplement mesurable.

2. Un opérateur markovien P, mesures P-invariantes

(2.1) Dans cette section, nous considérons un opérateur de transition sur X de la forme plus générale :

$$Pf(x) = \sum_j p_j(x) f(T^j x), \tag{2.1.1}$$

où les p_j sont des fonctions continues ≥ 0, de somme 1 et telles que p_1 et p_{-1} soient strictement positives.

Cet opérateur décrit la marche aléatoire sur X d'une particule qui se déplace de la position x au temps n à la position $T^j x$ au temps $n+1$, avec la probabilité $p_j(x)$.

L'opérateur P étant markovien, le théorème de Markov-Kakutani assure l'existence sur X d'au moins une mesure de probabilité P-invariante ν. Une telle mesure est quasi-invariante pour l'action de T. Il existe au moins une mesure extrémale parmi les mesures P-invariantes.

Partons maintenant d'une mesure ν quasi-invariante ergodique pour T ($T^{-1}\nu = \beta\nu$, où $\beta > 0$ est dans $L^1(\nu)$).

L'opérateur P étant markovien, la quasi-invariance de ν par T permet de définir $P^* f$, pour $f \in L^1(\nu)$ comme la densité par rapport à ν de la mesure $P(f\nu)$. On a donc $\int Pg\ f\ d\nu = \int g\ P^* f\ d\nu$, pour $f \in L^1(\nu)$ et $g \in L^\infty(\nu)$, et P^* est une contraction de $L^1(\nu)$ de la forme :

$$P^* f(x) = \sum_j p_j(T^{-j}x)\beta_{-j}(x)\, f(T^{-j}x). \tag{2.1.2}$$

Nous aurons besoin du résultat suivant lié à la conservativité d'une transformation inversible ergodique sur un espace non atomique (cf. [16] p. 19) :

(2.2) Lemme : *Si la mesure ν est extrémale parmi les mesures de probabilité P-invariantes, la transformation T est ergodique vis-à-vis de (la classe de) ν. Si ν n'est pas atomique, pour tout ensemble borélien A tel que $T^{-1}A \subset A$, alors A, ou son complémentaire, est négligeable.*

Preuve : 1) Si A est une ensemble borélien T-invariant, $T^{-1}A = A$, ν-p.p., de mesure non nulle, alors $P1_A = 1_A$, ν-p.p., et la mesure $1_A\nu$ est P-invariante. Si ν est extrémale, ceci implique que le complémentaire de A est négligeable.

2) Considérons maintenant un ensemble A de mesure non nulle sous-invariant : $T^{-1}A \subset A$ et montrons que $T^{-1}A = A$, ν-p.p..

Supposons qu'on ait $\nu(A - T^{-1}A) > 0$. Alors les images par T^k, $k \in \mathbb{Z}$, de l'ensemble $C = A - T^{-1}A$ sont deux à deux disjointes. Soit $C_0 \subset C$ de mesure non nulle. L'ensemble $A_0 = \cup_{k\in\mathbb{Z}} T^k C_0$ est T-invariant. D'après le point 1), ceci implique que le complémentaire de A_0 est négligeable ; d'où $C_0 = C$. L'ensemble C est donc un atome pour la mesure ν et, par extrémalité de ν, ν est purement atomique contrairement à l'hypothèse.

□

Mesure P-invariante équivalente à une mesure T-invariante

Rappelons également le résultat classique suivant (cf. [13]).

(2.3) Proposition : *Soit ν une mesure quasi-invariante ergodique pour T. S'il existe une mesure (finie) invariante pour P équivalente à ν, de densité notée ϕ, cette mesure est unique dans la classe de ν, l'opérateur P est ergodique dans $L^1(\phi\nu)$ et pour toute fonction $f \in L^\infty(\nu)$, nous avons :*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f = \nu(\phi f),$$

la convergence ayant lieu ν-p.p. et dans $L^1(\phi\nu)$.

Preuve : L'opérateur P, qui possède une mesure finie invariante équivalente à ν, est conservatif. Pour montrer l'ergodicité, il suffit de montrer que $P1_A = 1_A$, ν-p.p., implique que A, ou son complémentaire, est de mesure nulle.

La relation $1_A(x) = P1_A(x) = \sum_j p_j(x) 1_A(T^j x)$ implique, compte tenu de l'hypothèse $p_1 > 0$ et $p_{-1} > 0$ que, si $x \in A$, alors $Tx \in A$ et $T^{-1}x \in A$. Ainsi A est invariant par T et donc A (ou son complémentaire) est de ν (et donc de μ) mesure nulle. On conclut en appliquant le théorème ergodique de Hopf (cf. [16]) et l'ergodicité de T.

□

3. Cas de l'opérateur à deux termes

Nous revenons maintenant, et dans toute la suite, au cas où l'opérateur P se réduit à **deux termes**, ce qui correspond au cas de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, avec transition vers les proches voisins.

Mesures invariantes pour l'opérateur P

La recherche des mesures de probabilité ν sur X invariantes par P, i.e. telles que

$$P\nu = T^{-1}p\,T\nu + Tq\,T^{-1}\nu = \nu, \tag{**}$$

est reliée à l'étude des mesures de probabilité ν sur X vérifiant l'équation de **quasi-invariance** :

$$T^{-1}\nu = h\nu, \tag{E}$$

avec $h = \frac{p}{Tq}$. En effet toute mesure quasi-invariante solution de (E) pour ce choix de h est une mesure P-invariante.

Si ν est une mesure quasi-invariante pour T, $(T^{-1}\nu = \beta\nu)$, l'opérateur adjoint de P dans $L^1(\nu)$ est défini par :

$$P^* g = \beta\, Tq\ Tg + T^{-1}\beta^{-1}\, T^{-1}p\ T^{-1}g.$$

Supposons que T^2 soit ergodique pour ν. L'opérateur P est un opérateur auto-adjoint dans $L^2(\nu)$ si, et seulement si, ν est solution de (E) et dans ce cas $\beta = p/Tq$. Nous avons alors, d'après un théorème de E. Stein (cf. [16] p. 190), la convergence de la suite des itérées $(P^n f)_{n\geq 1}$ vers $\nu(f)$ en norme $L^2(\nu)$ et ν-p.p., pour toute fonction f dans $L^2(\nu)$.

Nous précisons dans ce paragraphe le lien entre l'équation $P\nu = \nu$ pour un opérateur P de la forme $(*)$, i.e. $Pf(x) = p(x)f(Tx) + q(x)f(T^{-1}x)$, et l'équation (E) avec le choix $h = \dfrac{p}{Tq}$.

Nous noterons $a = T(\dfrac{q}{p})$ (la fonction a est homologue, multiplicativement, à h^{-1}) et nous désignerons par h_k, a_k, pour $k \in \mathbb{Z}$, les fonctions obtenues en prenant pour u respectivement $u = h$ et $u = a$ dans les définitions du paragraphe 1.

(3.1) Théorème : *1) Soit ν une mesure P-invariante extrémale. Si ν n'est pas solution de l'équation de quasi-invariance (E), elle est non atomique et il existe une mesure de probabilité μ T-invariante ergodique équivalente à ν, vérifiant l'une des deux conditions i) ou ii) suivantes :*

i) $\sum_{k=0}^{\infty} \int h_k \, d\mu < \infty$,

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \int h_k^{-1} \, d\mu < \infty$.

2) Soit μ une mesure T-invariante ergodique. Il existe une mesure ν P-invariante équivalente à μ si, et seulement si, l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

i) $\sum_{k=0}^{\infty} \int h_k \, d\mu < \infty$ *(donc* $\int \log h \, d\mu < 0$*),*

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \int h_k^{-1} \, d\mu < \infty$ *(donc* $\int \log h \, d\mu > 0$*),* *iii) h (donc aussi p/q) est un cobord multiplicatif de la forme $h = T\phi/\phi$, avec $\phi > 0$ et μ-intégrable (d'où $\int \log h \, d\mu = 0$).*

Dans les cas i) et ii), la mesure ν est la forme $\nu = p^{-1}z\mu$, avec $z = \sum_0^\infty a_{-k}$ dans le cas i) et $z = \sum_0^\infty a_k$ dans le cas ii).

Preuve : 1) Les solutions de $P\nu = \nu$ sont les mesures quasi-invariantes pour T, telles que la densité β définie par $T^{-1}\nu = \beta\nu$, vérifie d'après $(**)$ la relation

$$1 = T^{-1}p\,T^{-1}\beta^{-1} + Tq\,\beta,\ \nu - p.p.. \tag{3.1.1}$$

(Remarquons que la fonction h vérifie également cette relation.)

Posons $\gamma = \beta\,Tq/p$. Alors, d'après (3.1.1), γ vérifie :

$$1 = p\,\gamma + q\,T^{-1}\gamma^{-1}\ \nu - p.p.. \tag{3.1.2}$$

Supposons que ν soit une mesure P-invariante extrémale. Les ensembles $\{\gamma > 1\}$, $\{\gamma = 1\}$ et $\{\gamma < 1\}$ sont respectivement sous-invariant par T^{-1}, invariant par T, sous-invariant par T. Si ν est atomique, alors elle vérifie (E) d'après la proposition 3.3 ci-dessous. Si ν est non atomique, on a nécessairement, d'après le lemme 2.2 : $\gamma = 1$, ν-p.p., ou $\gamma < 1$, ν-p.p., ou $\gamma > 1$, ν-p.p..

Dans le cas où $\gamma = 1$, ν-p.p., alors la mesure P-invariante ν vérifie la relation de quasi-invariance (E) : $T^{-1}\nu = \dfrac{p}{Tq}\nu$.

Nous allons montrer que, dans les deux autres cas, la mesure ν est équivalente à une mesure (finie) ergodique T-invariante μ. Plaçons-nous dans le cas où $\gamma < 1$, ν-p.p.. On traiterait le cas $\gamma > 1$ de façon analogue en remplaçant T par T^{-1}, l'équation (E) par l'équation équivalente $T\nu = T^{-1}\beta^{-1}\nu$ et γ par $T^{-1}\gamma^{-1} = T^{-1}\beta^{-1}q/T^{-1}p$.

La fonction z, définie par $z = \dfrac{1}{1-\gamma}$, vérifie $1 < z < \infty$, ν-p.p.. En appliquant T à (3.1.2) et en substituant $\gamma = \dfrac{z-1}{z}$, nous obtenons (avec $a = T(\dfrac{q}{p})$) la relation :

$$z = 1 + a\,Tz,\ \nu - p.p. \tag{3.1.3}$$

Rappelons la notation :

$$a_k(x) = \Pi_0^{k-1} a(T^i x),\ \text{pour } k \geq 1.$$

Pour ν-presque tout x, on obtient en itérant la relation (3.1.3),

$$z(x) = 1 + \sum_1^{n-1} a_k(x) + a_n(x)\,z(T^n x),\ n \geq 2.$$

La série $1+a_1+...+a_n+...$ converge donc ν-p.p. vers une limite v telle que $v \le z$ et on a $\lim_n a_n T^n z = z - v$. D'après l'ergodicité de ν, il existe une constante M telle que, pour ν-presque tout x, il existe une suite $(n_j(x))$ tendant vers $+\infty$ pour laquelle $z(T^{n_j(x)}x) \le M$. Ceci implique l'égalité ν-presque partout de z et de v et donc : $z(x) = 1 + \sum_1^\infty a_k(x)$.

Posons $\phi = p^{-1}z$. Nous avons d'après (3.1.3) :

$$\begin{aligned} T^{-1}(\phi^{-1}\nu) &= \frac{Tp}{Tz}\beta\nu = \frac{Tp}{Tz}\frac{p}{Tq}\frac{z-1}{z}\nu \\ &= \frac{z-1}{aTz}\frac{p}{z}\nu = pz^{-1}\nu = \phi^{-1}\nu. \end{aligned}$$

La mesure $\mu = \phi^{-1}\nu$ est donc une mesure finie T-invariante équivalente à ν.

Comme ν est une mesure finie, on a nécessairement :

$$\int (1+a_1+...+a_n+...)\, d\mu = \int z\, d\mu \le \int p^{-1}z\, d\mu = \nu(X) < \infty;$$

d'où la condition 1) *ii*), car $h_k^{-1} = a_k \dfrac{T^k p}{p} \le p^{-1}a_k$.

2) a) Inversement, soit μ une mesure de probabilité T-invariante ergodique. La condition :

$$\int \log a\, d\mu < 0$$

est suffisante (et nécessaire d'après le lemme ci-dessous), pour que la série définissant $\phi = p^{-1}z$ converge μ-p.p.. La condition

$$\int (1+a_1+...+a_n+...)\, d\mu < \infty$$

assure que $\nu = \phi\mu$, qui est une mesure P-invariante équivalente à μ, est une mesure finie. Dans la condition précédente, on peut remplacer a_k par h_k^{-1}, le rapport de ces deux quantités et son inverse restant bornés.

Le cas $\gamma > 1$ se traite de façon identique, en changeant T en T^{-1}.

Si 2) *iii*) est vérifiée, alors la mesure $\nu = \phi\mu$ est solution de (E), donc P-invariante, et est finie d'après l'intégrabilité de ϕ.

b) Montrons maintenant que les conditions sont nécessaires. Soit ν une mesure P-invariante équivalent à μ. On peut appliquer le point 1). Si les conditions 2) *i*) ou 2) *ii*) ne sont pas vérifiées, alors ν est solution de l'équation (E) avec $h = p/Tq$ et donc h est un cobord.

□

Nous avons utilisé le lemme suivant qui apparaît dans plusieurs questions de théorie ergodique et de probabilités et qui s'énonce, avec les notations précédentes (rappelons que la mesure T-invariante μ est supposée ergodique) :

(3.2) Lemme : *Si* $\log a$ *est intégrable, la série* $\sum a_k$ *converge* μ*-p.p. si, et seulement si,* $\int \log a \; d\mu < 0$.

Preuve : La convergence ponctuelle de la série $\sum a_k$ implique

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log a(T^k x) \leq 0,$$

d'où la condition nécessaire : $\int \log a \; d\mu(x) \leq 0$.

Si l'on avait l'égalité $\int \log a \; d\mu(x) = 0$, alors les sommes $\sum_{k=0}^{n-1} \log a(T^k x)$ seraient récurrentes dans un voisinage de 0 (cf. [11]) et le produit $a_n(x)$ reviendrait dans un voisinage de 1, ce qui contredirait la convergence de la série.

Inversement, il est clair, par le théorème ergodique, que la condition $\int \log a \; d\mu(x) < 0$ implique la convergence de la série $\sum a_k$.

□

Précisons la forme des mesures P-invariantes atomiques.

(3.3) Proposition : *Si* ν *est une mesure de probabilité atomique* P*-invariante extrémale, elle est solution de (E). Il existe* $x \in X$ *tel que*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k(x) < +\infty \tag{3.3.1}$$

et ν *est concentrée sur l'orbite de* x *et donnée, à un facteur près, par* $\nu(\{T^n x\}) = h_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, sous la condition (3.3.1), la mesure définie par cette relation vérifie $T^{-1}\nu = h\nu$ *et donc* $P\nu = \nu$.

Preuve : En appliquant T^{-k} à la relation $(**)$ d'invariance par P, nous obtenons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$T^{-k}\nu = T^{k-1} p \, T^{-(k-1)}\nu + T^{k+1} q \, T^{-(k+1)}\nu. \tag{3.3.2}$$

Si l'on a $\nu(\{x\}) > 0$, pour un point $x \in X$, alors la mesure ν charge l'orbite de x. Puisque ν est atomique, une telle orbite existe et la restriction de ν à $(\{T^k x\})_{k \in \mathbb{Z}}$ est encore P-invariante et donc coïncide avec ν, d'après l'extrémalité de ν.

Posons $v_k = \nu(\{T^k x\})$, $p_k = p(T^k x)$, $q_k = q(T^k x)$. L'équation (3.3.2) s'écrit sous la forme de la relation de récurrence :

$$v_k = p_{k-1} v_{k-1} + q_{k+1} v_{k+1}.$$

Posons $w_k = q_k v_k - p_{k-1} v_{k-1}$. Nous avons alors $w_k = w_{k+1}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. La quantité w_k est donc indépendante de k et la condition $\sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k < +\infty$ implique $w_k = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$. On a donc, avec les notations du paragraphe 1 et $h = p/Tq$,

$$\nu(\{T^k x\}) = h_k(x), \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Le point $x \in X$, dont l'orbite porte la mesure ν, vérifie :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k(x) < +\infty. \tag{3.3.1}$$

Inversement, si x est un point vérifiant (3.3.1), la mesure $\nu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k(x)\, \delta_{T^k x}$ est une mesure finie extrémale vérifiant $T^{-1}\nu = h\nu$.

□

Cas indépendant, mesures de Gibbs

Dans les deux corollaires qui suivent, on considère un espace produit bilatère Ω muni du décalage (noté T) et d'une mesure invariante π.

Si l'on suppose que p, et donc q et h, ne dépendent que de la première coordonnée et que la mesure π est une mesure produit, on est dans le cas d'un "environnement aléatoire" défini par des variables i.i.d. et l'on retrouve un résultat classique (en notant $\mathbb{E}$ l'intégrale par rapport à π) :

(3.4) Corollaire : *Soit (Ω, T, π) le décalage, π étant une mesure produit. On suppose que p ne dépend que de la première coordonnée (environnement aléatoire indépendant) et n'est pas presque sûrement égal à $\frac{1}{2}$. Alors il existe une mesure de probabilité P-invariante absolument continue par rapport à π si, et seulement si, les conditions i), ii) ou iii) suivantes sont réalisées :*
i) $\mathbb{E}(p/q) < 1$,
ii) $\mathbb{E}(q/p) < 1$,
iii) il existe une fonction höldérienne ϕ telle que $p/q = T\phi/\phi$.

En particulier, si $\mathbb{E}(\log(p/q)) = 0$, ou si $\mathbb{E}(p/q) > 1$ et $\mathbb{E}(\log(p/q)) < 0$, ou si $\mathbb{E}(q/p) > 1$ et $\mathbb{E}(\log(p/q)) > 0$, il n'y a pas de mesure de probabilité P-invariante absolument continue par rapport à π.

On peut étendre ce type de résultat au cas où p est une fonction régulière sur un sous-shift de type fini et π une mesure de Gibbs et à partir de là aux difféomorphismes d'Anosov (cf. [3], [22]).

Plus précisément, soient A un alphabet fini, $(\Sigma, T) \subset (A^{\mathbb{Z}}, T)$ un sous-shift qui est de type fini et topologiquement mélangeant. Soit π une mesure (de Gibbs) sur (Σ, T) associée à une fonction höldérienne. L'opérateur adjoint de T dans $L^2(\Sigma^+, \pi)$ est de la forme $Q_g f(\omega) = \sum_{a\omega\in\Sigma^+} \exp(g(a\omega))f(a\omega)$, où g est une fonction höldérienne sur le sous-shift unilatère noté Σ^+.

On sait que, pour toute fonction höldérienne ψ sur Σ^+, la quantité

$$\lim_n \left(\int \Pi_{i=0}^{n-1} \exp(\psi(T^i\omega)) \; d\pi(\omega)\right)^{\frac{1}{n}}$$

existe et est égale au rayon spectral $\rho(\psi + g)$ de l'opérateur de transfert $Q_{\psi+g}$ défini par $Q_{\psi+g}f = Q_g(\exp(\psi)f)$.

Dans le cas général d'une fonction ψ höldérienne sur Σ, il existe une fonction u höldérienne sur Σ telle que $\psi+Tu-u$ ne dépendent que des coordonnées positives, ce qui permet de se ramener au cas précédent.

Du théorème 3.1 et de résultats classiques sur les opérateurs de transfert (cf. par exemple [9]), on déduit :

(3.5) Corollaire : *Soit (Σ, T, π) un sous-shift de type fini et topologiquement mélangeant, muni d'une mesure de Gibbs π associée à une fonction höldérienne g. Soit P un opérateur de la forme $(*)$, avec p höldérienne. Alors il existe une mesure de probabilité P-invariante absolument continue par rapport à π si, et seulement si, les conditions $i)$ ou $ii)$ suivantes sont réalisées :*
i) $\rho(\log(p/q) + g) < 1$ *(d'où $\int \log(p/q) \; d\pi < 0$),*
ii) $\rho(\log(q/p) + g) < 1$ *(d'où $\int \log(p/q) \; d\pi > 0$) .*

En particulier, si $\int \log(p/q) \; d\pi \;\; = 0$, il existe une mesure de probabilité P-invariante absolument continue par rapport à π si, et seulement si, il existe une fonction **höldérienne** *ϕ telle que $p/q = T\phi/\phi$.*

Remarque : Etant donnés une fonction θ höldérienne > 0 et un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, prenons p et q de la forme

$$p = \frac{\theta^\lambda}{1+\theta^\lambda}, \; q = \frac{1}{1+\theta^\lambda}. \tag{3.5.1}$$

Supposons que $\log\theta$ ne soit pas homologue (dans la classe des fonctions höldériennes) à une fonction négative ou nulle. D'après un résultat de [6], il existe des valeurs de $\lambda > 0$ telles que $\rho(g + \lambda \log\theta) > 1$. Si $\int \log\theta \; d\mu \leq 0$, alors il n'existe pas de mesure P-invariante équivalente à μ pour ces choix de λ.

Si $\int \log\theta \; d\mu > 0$, on raisonne avec λ négatif : Si $\log\theta$ n'est pas homologue à une fonction positive ou nulle, il existe des valeurs de $\lambda < 0$ telles que $\rho(g+\lambda \log\theta) > 1$.

Il en résulte que si $\log\theta$ n'est pas homologue dans la classe des fonctions höldériennes à une fonction de signe constant, il existe des valeurs de λ pour lesquelles, p et q étant définies par (3.5.1), il n'existe pas de mesure P-invariante équivalente à une mesure de Gibbs donnée.

Cas uniquement ergodique

Dans le cas où T est **uniquement ergodique** sur X, une question naturelle est celle de l'unicité d'une mesure P-invariante ν et de son absolue continuité par rapport à l'unique mesure T-invariante. Le cas d'unicité pour P correspond à la convergence uniforme, pour toute fonction f continue sur X, des moyennes (cf. [16] p. 178) :

$$\lim_n \|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k f - \nu(f)\|_\infty = 0.$$

(3.6) Théorème : *Soit T uniquement ergodique sur X, d'unique mesure invariante μ.*

1) Si $\int \log(q/p)\, d\mu \neq 0$, il existe une unique mesure de probabilité ν P-invariante ; cette mesure possède une densité par rapport à μ et n'est pas solution de E ;

2) Si $\int \log(q/p)\, d\mu = 0$, alors toute mesure ν invariante par P est solution de l'équation (E), c'est-à-dire vérifie $T^{-1}\nu = h\nu$, avec $h = p/Tq$.

Dans ce cas, la mesure ν a une densité par rapport à μ si, et seulement si, h est un cobord multiplicatif de la forme $h = T\phi/\phi$, ϕ étant une fonction mesurable > 0 μ-intégrable. Si ϕ^{-1} est bornée, la solution ν de (E) est unique.

Preuve : 1) Soit ν une mesure de probabilité P-invariante. D'après la proposition 4.1 montrée plus loin, la condition $\int \log(q/p)\, d\mu \neq 0$ exclut que ν soit solution de (E).

La condition $\sum_{k=0}^{\infty} \int h_k\, d\mu < \infty$ est réalisée, si $\int \log(p/q)\, d\mu < 0$, compte-tenu de la convergence uniforme dans le théorème ergodique appliqué à $\log h$. On est alors dans la condition 2) *i*) du théorème 3.1. De même, si $\int \log(p/q)\, d\mu > 0$, on est dans la condition 2) *ii*) du théorème 3.1.

2) Si $\int \log(p/q)\, d\mu = 0$, on applique le théorème 3.1 en se ramènant au cas où ν est extrémale par désintégration.

La dernière assertion résulte de l'invariance par T de la mesure $\phi^{-1}\nu$.

□

Nous examinerons au paragraphe 5 le cas particulier du cercle muni de la mesure de Lebesgue λ et de la transformation $T = T_\alpha$ (uniquement ergodique) définie par une rotation d'angle α irrationnel. Nous verrons que, si $\log \frac{p}{q}$ est à variation bornée, il est possible de traiter les cas 2) et donc de conclure à l'unicité de la mesure de probabilité P-invariante.

4. Etude des solutions de l'équation $T^{-1}\nu = h\nu$

Nous avons vu le rôle de l'équation (E) $T^{-1}\nu = h\nu$, (avec $h = \frac{p}{Tq}$) dans la recherche de mesures P-invariantes, dans le cas "centré" $\int \log(p/q)\ d\mu = 0$. Nous étudions maintenant cette équation dans le cas général d'une fonction h continue sur X strictement positive.

En appliquant le théorème de Schauder-Tychonov (cf. [15]) au cône des mesures de Radon positives sur X et à l'application : $\mu \to h^{-1}T^{-1}\mu$, on obtient l'existence d'un scalaire $c > 0$ et d'une mesure de probabilité ν tels que

$$T^{-1}\nu = c\,h\nu. \tag{E'}$$

L'ensemble des scalaires c tels que l'on ait (E') pour une mesure ν forme un ensemble non vide, compact d'après la compacité faible-* de l'ensemble des probabilités sur X.

Notons que les mesures ν sont en général singulières par rapport à μ. La valeur propre c est unique dans le cas uniquement ergodique :

(4.1) Proposition : *Si T est uniquement ergodique avec unique mesure de probabilité invariante μ, l'application définie sur le cône des mesures de Radon positives par $\mu \to h^{-1}T^{-1}\mu$ possède une unique valeur propre égale à* $\exp(-\int \log h\ d\mu)$.

En particulier, l'équation (E) a une solution si, et seulement si, $\int \log h\ d\mu = 0$.

Preuve : Pour tout $\epsilon > 0$ et n assez grand, nous avons, pour tout $x \in X$: $\exp\big(n(\int \log h\ d\mu - \epsilon)\big) \leq h_n(x) \leq \exp\big(n(\int \log h\ d\mu + \epsilon)\big)$. D'autre part, si ν vérifie (E'), nous avons $\nu(h_n) = c^n$, ce qui implique $c = \exp(\int \log h\ d\mu)$.

□

Nous allons maintenant construire, dans le cas général, des mesures de probabilité solutions de (E) par le procédé des sous-suites. Nous notons $\mathcal{M}(T)$ l'ensemble des mesures de probabilité T-invariantes et $\mathcal{E}(T)$ le sous-ensemble formé des mesures T-ergodiques. Pour la notion de spécification, on pourra se référer à [7].

(4.2) Proposition : *Une condition suffisante pour qu'il existe une solution ν de (E) est*

$$\inf_{\mu \in \mathcal{E}(T)} \left| \int \log h\ d\mu \right| = 0. \tag{4.2.1}$$

Cette condition est nécessaire si le système (X,T) satisfait la propriété de spécification.

C'est en particulier le cas si (X,T) est un sous-shift de type fini topologiquement mélangeant.

Preuve : 1) Pour $n \geq 1$, posons $S_n f = f + h\,Tf + ... + h_{n-1}\,T^{n-1}f$, soit en explicitant :

$$S_n(f,x) = f(x) + h(x)\,f(Tx) + ... + h(x)...h(T^{n-2}x)\,f(T^{n-1}x).$$

Les rapports

$$Q_n(f,x) = \frac{S_n(f,x)}{S_n(1,x)} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} h_k(x) f(T^k x)}{\sum_{k=0}^{n-1} h_k(x)}$$

vérifient : $|Q_n(f,x)| \leq \|f\|_\infty$.

Fixons $x \in X$. Par le procédé diagonal et la séparabilité de $\mathcal{C}(X)$, de toute suite on peut extraire une sous-suite $(n_j)_{j\geq 1}$ telle que $(Q_{n_j}(f,x))_{j\geq 1}$ converge, pour toute fonction f continue, vers une limite notée $\nu(f,x)$.

De la relation

$$S_n(f,x) = S_n(hTf,x) + f(x) - h_n(x)T^n f(x),$$

on déduit que la mesure $f \to \nu(f,x)$ vérifie (E), i.e. :

$$\nu(hTf,x) = \nu(f,x),$$

pourvu que les deux conditions suivantes soient réalisées :

$$\lim_j \sum_{k=0}^{n_j-1} h_k(x) = \infty, \tag{4.2.2}$$

et

$$\lim_j \sum_{k=0}^{n_j-1} h_k(x)/h_{n_j}(x) = \infty. \tag{4.2.3}$$

Montrons que (4.2.2) et (4.2.3) sont vérifiées pour une sous-suite $(n_i)_{i\geq 1}$ et un point x, s'il existe une mesure μ T-invariante ergodique telle que $\int \log h \; d\mu = 0$.

On sait (cf. la preuve du lemme 3.2) que, pour μ-presque tout x, il y a récurrence des sommes ergodiques $(\sum_{j=0}^{n} \log h(T^j x))_{n\geq 1}$. Il existe donc une constante $C > 0$ et une suite de temps $(n_i)_{i\geq 1}$ (dépendant de x) telles que

$$C^{-1} \leq h_{n_i}(x) \leq C.$$

Dans le procédé diagonal utilisé plus haut, on peut se restreindre à cette suite particulière, de façon à assurer les conditions (4.2.2) et (4.2.3).

Ce raisonnement montre, en remplaçant h par ch, que le compact formé de l'ensemble des valeurs propres c dans (E') contient l'ensemble

$$\{\exp(\int (-\log h)\; d\mu),\;\; \mu \in \mathcal{E}(T)\}.$$

La première assertion en résulte.

Une variante de cette construction consiste à prendre des valeurs d'adhérence des mesures définies par

$$f \to \int \frac{S_n(f,x)}{S_n(1,x)}\, d\mu(x).$$

Ces valeurs d'adhérence vérifient la relation de quasi-invariance.

En effet, le quotient $(h_n(x))^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} h_k(x)$ s'écrit (relation de cocycle) $T^n \sum_1^n h_{-k}$. On a donc, d'après l'argument de récurrence :

$$\lim_n \int \frac{f(x) - h_n(x) T^n f(x)}{S_n(1,x)}\, d\mu(x) = 0.$$

2) Supposons qu'il existe une mesure de probabilité ν solution de (E).

Nous avons $\nu(\{h_n \leq 2\}) \geq \frac{1}{2}$ et $\int_{\{h_n \geq \frac{1}{2}\}} h_n\, d\nu \geq \frac{1}{2}$. Il existe donc, pour tout $n \geq 1$, x_n et y_n dans X tels que $h_n(x_n) \leq 2$ et $h_n(y_n) \geq \frac{1}{2}$, ce qui implique :

$$\limsup_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log h(T^k x_n) \leq 0 \leq \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log h(T^k y_n).$$

Par le procédé diagonal, on peut alors construire deux mesures T-invariantes μ_1 et μ_2 valeurs d'adhérence faible-* respectivement des suites $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x_n})_{n\geq 1}$ et $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k y_n})_{n\geq 1}$ telles que

$$\mu_1(\log h) \leq 0 \leq \mu_2(\log h).$$

Par combinaison linéaire de ces deux mesures, on obtient une mesure de probabilité μ T-invariante telle que $\mu(\log h) = 0$.

Si la transformation T sur X vérifie la propriété de spécification, l'ensemble des mesures ergodiques est dense dans $\mathcal{M}(T)$ (cf. proposition (21.9) de [7]). La condition (4.2.1) est donc vérifiée.

□

Remarques : 1) L'opérateur défini par $f \to hTf$ est une contraction de $L^1(\nu)$, pour toute mesure ν vérifiant (E). Par le théorème de Chacón-Ornstein (cf. [16] p. 122), en utilisant la séparabilité de $\mathcal{C}(X)$, on obtient, pour ν-presque tout x, la convergence de la suite $(Q_n(f)(x))_{n\geq 1}$, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(X)$.

2) Supposons que T soit une rotation ergodique et $\log h$ à variation bornée d'intégrale nulle. Alors, pour tout $x \in X$, de toute suite d'entiers, on peut extraire une sous-suite (n_j) telle que $(Q_{n_j}(f,x))_{j\geq 1}$ converge, pour toute fonction

f continue, vers une limite $\nu(f, x)$ telle que la mesure $f \to \nu(f, x)$ vérifie l'équation (E).

En effet, les conditions (4.2.2) et (4.2.3) sont vérifiées pour tout x, d'après l'inégalité (5.1.1) de Denjoy-Koksma (lemme 5.1 ci-dessous).

3) Dans le cas d'unicité de la mesure ν solution de (E), il y a convergence uniforme des rapports ergodiques $(Q_n(f, x))_{n\geq 1}$ vers $\nu(f)$, pour f continue. Nous verrons que c'est le cas pour une rotation irrationnelle et pour une fonction h telle que $\log h$ soit à variation bornée et d'intégrale nulle.

4) La mesure solution de (E) construite dans la proposition 4.2 peut être a priori atomique et, d'après la proposition 3.3, portée par l'orbite d'un point $x \in X$ vérifiant la condition $\sum_{k\in \mathbb{Z}} h_k(x) < \infty$.

Ceci est exclu dans le cas d'une rotation sur le cercle, si $\log h$ est à variation bornée. En effet, dans ce cas, aucun point x ne vérifie $\sum_{k\in \mathbb{Z}} h_k(x) < \infty$, d'après l'inégalité (5.1.1). Cette observation peut être étendue à des fonctions höldériennes sous des hypothèses diophantiennes sur α.

Elle ne s'étend pas au cas général des fonctions continues. En effet, d'après une construction de J. Brémont [4], pour toute rotation d'angle α irrationnel, il existe une fonction h continue telle que, pour tout x rationnel, on ait $\sum_{k\in \mathbb{Z}} h_k(x) < +\infty$. D'après le lemme 3.3, pour une telle fonction, il existe alors, pour chaque x rationnel, une mesure ν atomique P-invariante extrémale solution de (E). La mesure ν est concentrée sur l'orbite de x et définie, à un facteur près, par $\nu(\{T^n x\}) = h_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

5) Dans le cas général, la question de la construction d'une mesure non atomique solution de (E) est posée. Pour le cas des sous-shift de type fini et des fonctions $\log h$ höldériennes, il devrait être possible de construire une telle mesure par une méthode inspirée des mesures de Gibbs. Notons que, dans la situation décrite dans le corollaire 3.5 et la remarque qui le suit, pour une valeur de λ telle que le rayon spectral $\rho(g + \lambda \log h)$ soit égal à 1, on peut effectivement construire une solution de l'équation $T^{-1}\nu = h^\lambda \nu$ qui se projette sur le sous-shift unilatère en une mesure équivalente à la mesure de Gibbs définie par g.

Singularité de la mesure ν

Soit μ une mesure T-invariante ergodique. S'il existe une mesure $\nu = \phi\mu$, absolument continue par rapport à μ, vérifiant $T^{-1}\nu = h\nu$, alors l'ensemble $\{\phi = 0\}$ est T-invariant donc de μ-mesure nulle. La fonction h est alors un cobord multiplicatif mesurable, $h = T\phi/\phi$, avec ϕ mesurable > 0 μ-p.p. et μ-intégrable.

Si h ne vérifie pas ces conditions, alors toute mesure de probabilité ν solution de (E) est singulière par rapport à μ. En particulier, si h est un cobord, $h = T\phi/\phi$, avec ϕ mesurable > 0, mais non μ-intégrable, alors toute mesure de probabilité ν solution de (E) est équivalente à une mesure σ-finie T-invariante (la mesure $\phi^{-1}\nu$), qui est singulière par rapport à μ.

Si la transformation possède une unique mesure de probabilité invariante μ et si h est un cobord $h = T\phi/\phi$, avec $\int \phi^{-1}\ d\nu < \infty$, alors ν est l'unique mesure de probabilité solution de (E) et on a de plus $\int \phi\ d\mu < \infty$.

Ceci conduit au résultat suivant :

(4.3) Proposition : *Soit T uniquement ergodique d'unique mesure de probabilité invariante μ. Si une fonction strictement positive continue h est un cobord multiplicatif, $h = T\phi/\phi$, (avec égalité en tout point, ϕ borélienne et ϕ^{-1} bornée), alors ϕ est μ-intégrable et $(\int \phi\ d\mu)^{-1}\phi\ d\mu$ est l'unique probabilité vérifiant (E).*

Preuve : Remarquons d'abord que $\int \log h\ d\mu = 0$ (cf. [2]). En effet, soient M et m tels que l'ensemble $\{m \leq \phi \leq M\}$ soit de μ-mesure > 0. Par le théorème de récurence de Poincaré, pour μ-presque tout $x \in \{m \leq \phi \leq M\}$, les sommes $\sum_{k=0}^{n-1} T^k \log h$ reviennent indéfiniment dans un ensemble borné. Ceci implique, par le théorème ergodique, que l'intégrale $\int \log h\ d\mu$ ne peut être non nulle.

Soit ν une mesure de probabilité vérifiant : $T^{-1}\nu = h\nu$ (proposition 4.1).

La mesure $\phi^{-1}\nu$ est T-invariante, finie et non nulle. Elle est donc proportionnelle à μ, ce qui implique que $\int \phi\ d\mu < \infty$. De plus, la mesure ν est unique sous ces conditions.

□

On note qu'une condition nécessaire pour que h soit un cobord multiplicatif mesurable, $h = T\phi/\phi$, avec $\phi > 0$, μ-intégrable, est que $\log h$ soit un cobord additif mesurable $\log h = T \log \phi - \log \phi$, avec $\int \log^+ \phi\ d\mu < +\infty$.

5. Le cas du cercle

Dans cette section, nous allons étudier plus précisément le cas du cercle identifié à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Nous pourrons envisager des fonctions à variation bornée éventuellement non continues. Pour $\alpha \in]0, 1[$, notons T_α la rotation $x \to x + \alpha \bmod 1$.

Nous allons construire des fonctions h et des angles α tels que la mesure ν solution de (E) soit singulière. Faisons d'abord quelques rappels.

Nous notons λ la mesure de Lebesgue sur le cercle. Pour un réel x, $((x))$ désigne la quantité $\inf_{n\in\mathbb{Z}} |x - n|$. Un nombre α irrationnel dans $]0, 1[$ étant fixé de développement en fraction continue $\alpha = (0; a_1 a_2 \cdots a_n \cdots)$, notons $(p_n/q_n)_{n\geq 0}$ la suite de ses convergents (réguliers). Rappelons qu'on a

$$|q_n\alpha - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}},\ \forall n \geq 1,$$

et l'inégalité de Denjoy-Koksma (cf. [18]) :

(5.1) Lemme : *Si ϕ est une fonction à variation bornée sur le cercle, on a :*

$$|\sum_{k=0}^{q_n-1} \phi(x+k\alpha) - q_n \int \phi \, d\lambda| \leq Var(\phi), \ \forall n \geq 1. \tag{5.1.1}$$

(5.2) Cas symétrique

Considérons le cas particulier où $h = p/Tq$, avec p/q symétrique (dans le sens que p/q vérifie $(p/q)(x+\frac{1}{2}) = (q/p)(x), \forall x \in]0, \frac{1}{2}]$). Supposons que h soit un cobord multiplicatif, $h = T\phi/\phi$, avec ϕ intégrable > 0.

On a alors $\log(p/q) = T_\alpha \log \phi_1 - \log \phi_1$, avec $\phi_1 = q\phi$ intégrable. La fonction $\log \phi_1$ est impaire ($\log \phi_1(x+\frac{1}{2}) = -\log \phi_1(x)$) à une constante additive près. D'après la condition nécessaire donnée à la fin du paragraphe 4, $\log^+ \phi_1$ doit être intégrable pour la mesure de Lebesgue λ et donc $\log \phi_1$ est aussi λ-intégrable.

Donnons un exemple simple pour lesquel on peut construire des rotations d'angle α telles que cette condition ne soit pas vérifiée.

Exemple : Prenons pour p le polynôme trigonométrique

$$p(x) = \frac{1}{2} + t \sin(2\pi x),$$

avec $0 < t < 1/2$. Notons

$$\gamma(x) = \frac{1 + 2t\sin(2\pi x)}{1 - 2t\sin(2\pi x)}.$$

Les coefficients de Fourier d'ordre pair de $\log \gamma$ sont nuls et ceux d'ordre impair se calculent en effectuant le développement de γ'/γ, comme fraction rationnelle en $e^{2\pi i x}$.

On obtient :

$$\log \gamma(x) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \ \theta_t^{2n+1} \ \sin(2\pi(2n+1)x),$$

avec

$$\theta_t = \frac{1 - \sqrt{1-4t^2}}{2t} \ \in]0, 1[.$$

Si la mesure ν est non-singulière, nous avons $\log \gamma = T_\alpha \zeta - \zeta$, avec ζ intégrable. Il en résulte qu'une condition nécessaire pour qu'il existe une mesure invariante par l'opérateur P ayant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue est :

$$\sup_{n \geq 1} \frac{\theta_t^{2n}}{|n \sin(2\pi(2n+1)\alpha)|} < \infty.$$

Comme les q_n associés à α ne sont pas consécutivement pairs, on peut construire des α, du type Liouville, pour lesquels la condition précédente n'est pas vérifiée. Il suffit de construire des nombres α dont les termes (a_n) du développement en fraction continue vérifient :

$$\sup_{n \geq 1} (\theta_t^{2n} a_n) = \infty.$$

On obtient ainsi des exemples de mesures ν singulières par rapport à la mesure de Lebesgue telles que $T_\alpha^{-1}\nu = h\nu$, avec une fonction h analytique.

(5.3) Cocycles ergodiques

On peut également utiliser des propriétés d'ergodicité de cocycles pour montrer la singularité de ν.

Soit ψ une fonction mesurable sur le cercle. Nous dirons que ψ définit un cocycle ergodique (pour la rotation T_α), si la transformation $(x, y) \to (T_\alpha x, y + \psi(x))$ est ergodique sur l'espace $X \times I\!R$ muni de la mesure produit $\lambda \times dy$.

Etant donnée une rotation T_α, si la fonction $\log h$ définit un cocycle ergodique, alors elle ne peut pas être un cobord mesurable et il n'y a donc pas de solution ν (finie ou σ-finie) de (E) non singulière. Autrement dit, s'il existe ν non-singulière, finie ou non, solution de (E), alors $\log h$ définit un cocycle non-ergodique.

De nombreux exemples explicites de cocycles ergodiques ont été construits. Donnons un exemple simple.

Exemple : (cf. [5]) Soit h défini par $h(x) = 2$, pour $0 \leq x < 1/2$, $h(x) = 1/2$, pour $1/2 \leq x < 1$. Pour tout α irrationnel, le cocycle défini par $\log h$ est ergodique et la mesure ν est donc singulière. Ici la singularité de la mesure est une propriété indépendante de l'irrationnel α.

Cet exemple correspond à un milieu "presque périodique" pour lequel on a : sur une moitié du cercle $p = 2/3, q = 1/3$, et sur l'autre moitié $p = 1/3, q = 2/3$.

Comportement des sommes $\sum_1^{n-1} h_k(x)$

La suite des sommes $\sum_1^{n-1} h_k(x)$ joue un rôle important dans l'étude de la marche aléatoire simple en environnement aléatoire fixé par un point $x \in X$.

Le résultat qui suit montre que, pour une fonction à variation bornée et une rotation α irrationnelle quelconque, le comportement des sommes $\sum_1^{n-1} h_k(x)$ peut être très différent suivant le choix du point x. La preuve illustre l'utilisation de l'équation de quasi-invariance (E).

Rappelons d'abord un résultat de Y. Peres, conséquence du lemme maximal.

(5.4) Lemme : [21] *Soient X un espace compact, T une transformation continue de X préservant une mesure de probabilité borélienne μ sur X. Pour toute fonction f continue sur X, il existe $x_0 \in X$ tel que*

$$\sum_{j=0}^{k-1} f(T^j x_0) \geq k\ \mu(f), \forall k \geq 1.$$

(5.5) Proposition : *Si $\log h$, à variation bornée et d'intégrale nulle pour la mesure de Lebesgue sur le cercle, n'est pas un cobord mesurable pour $T = T_\alpha$, il existe deux points du cercle x_0 et x_1 tels que*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h_k(x_0) = +\infty \text{ et } \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h_k(x_1) = 0.$$

Preuve : D'après le lemme 5.4, il existe x_0 tel que $\sum_{j=0}^{k-1} \log h(T^j x_0) \geq 0$, pour tout $k \geq 1$, soit $h_k(x_0) \geq 1, \forall k \geq 1$.

Considérons les rapports

$$Q_n(f,x) = \frac{S_n(f,x)}{S_n(1,x)} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} h_k(x) f(T^k x)}{\sum_{k=0}^{n-1} h_k(x)}.$$

Supposons qu'on ait $\liminf \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h_k(x_0) = c < \infty$. Soit $S = (n_j)$ une suite d'entiers telle que

$$\lim \frac{1}{n_j} \sum_{k=0}^{n_j-1} h_k(x_0) = c.$$

La fonction $\log h$ étant à variation bornée, nous pouvons (cf. la remarque 2 suivant la proposition 4.2) extraire une sous-suite $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$ telle que $\lim_{n \in \mathcal{S}_1} Q_n(f, x_0) = \nu(f)$, où ν est une mesure quasi-invariante vérifiant (E).

Alors on aurait, pour cette constante c, $\nu \geq c^{-1}\lambda$. Soit ϕ la densité de λ par rapport à ν. De $\lambda = \phi\nu$, on déduit : $hT\phi = \phi$, ν-p.p.. Comme $\phi > 0$ λ-p.p., il en résulte que h est un cobord.

De même, si x_1 est tel que $h_k(x_1) \leq 1$, en supposant que $\limsup \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h_k(x_1) = c > 0$, on obtiendrait $\nu \leq c^{-1}\lambda$ et on en déduirait, comme précédemment, que h est un cobord.

□

Unicité de la mesure quasi-invariante

(5.6) Théorème : *Si T_α est une rotation irrationnelle sur le cercle et h telle que $\log h$ soit à variation bornée et d'intégrale nulle, il existe une unique mesure de probabilité ν sur le cercle solution de l'équation*

$$T_\alpha^{-1}\nu = h\nu, \tag{E}$$

Preuve : Soit ν une mesure sur le cercle X solution de (E). L'existence d'une telle mesure est assurée par la proposition 4.1.

S'il n'y avait pas unicité de la solution de (E), pour une rotation et une densité h données, on pourrait construire une mesure solution de (E) non ergodique. L'unicité de ν résulte alors de la proposition suivante dans laquelle nous montrons que la classe de ν est ergodique pour T_α, sous l'hypothèse que $\log h$ est à variation bornée.

□

La remarque 4) suivant la proposition 4.2 montre que l'unicité n'est pas toujours vérifiée sous la seule hypothèse de continuité de h. Pour prouver l'ergodicité, sous les hypothèses du théorème 5.6, nous reprenons la méthode exposée dans [18].

(5.7) Proposition : *Sous les hypothèses du théorème (5.6), si A est un ensemble T_α-invariant de ν-mesure > 0, il est de ν-mesure 1.*

Preuve : Notons $J_n = J_n(x)$ les intervalles $[x - ((q_n\alpha)), x + ((q_n\alpha))]$.

Il existe (cf. [8]) un point x de densité pour ν dans A et donc, pour tout $\epsilon > 0$, un entier n tel que

$$\frac{\nu(J_n \bigcap A)}{\nu(J_n)} > 1 - \epsilon.$$

Rappelons que l'on a : $q_n((q_{n+1}\alpha)) + q_{n+1}((q_n\alpha)) = 1$. Les images de J_n par T_α^k, pour $k = 0, ..., q_{n+1} - 1$, recouvrent le cercle, et chaque point du cercle appartient à deux, au plus, de ces images. La fonction $\log h$ étant à variation bornée, si $x, y \in J_n$, les rapports des dérivées de Radon-Nikodym $dT_\alpha^k\nu/d\nu$ en ces deux points restent bornés : il existe une constante C telle que

$$C^{-1} \leq \frac{h_k(x)}{h_k(y)} \leq C,\ k = 0, ..., q_{n+1} - 1.$$

Pour tout ensemble B, on obtient, en prenant x_0 dans J_n,

$$\begin{aligned} \frac{\nu(T^k(J_n \bigcap B))}{\nu(T^k J_n)} &= \frac{\int 1_{J_n \bigcap B}\ h_k\ d\nu}{\int 1_{J_n}\ h_k\ d\nu} \\ &\leq \frac{C h_k(x_0) \int 1_{J_n \bigcap B}\ d\nu}{C^{-1} h_k(x_0) \int 1_{J_n}\ d\nu} \leq C^2 \frac{\nu(J_n \bigcap B)}{\nu(J_n)}. \end{aligned}$$

On a donc, l'ensemble A^c étant T_α-invariant :

$$\frac{\nu(T^k J_n \bigcap A^c)}{\nu(T^k J_n)} = \frac{\nu(T^k(J_n \bigcap A^c))}{\nu(T^k J_n)} \leq C^2 \frac{\nu(J_n \bigcap A^c)}{\nu(J_n)} \leq C^2 \epsilon;$$

d'où

$$\begin{aligned}\nu(A^c) &= \nu(\bigcup_{0}^{q_{n+1}-1} (T^k J_n \bigcap A^c)) \\ &\leq C^2 \epsilon \sum_{k=0}^{q_{n+1}-1} \nu(T^k J_n) \\ &\leq 2C^2 \nu(X) \epsilon = 2C^2 \epsilon.\end{aligned}$$

On en déduit : $\nu(A^c) = 0$.

□

En appliquant la proposition 4.1 et le théorème 5.6, on obtient :

(5.8) Corollaire : *Soient T_α une rotation irrationnelle sur le cercle, P l'opérateur défini par (*). Si $h = \frac{p}{Tq}$ est à variation bornée. Alors l'équation $P\nu = \nu$ a une unique solution, qui est une mesure non atomique, et, pour toute fonction f continue, la suite des moyennes $(\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} P^k f)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers $\nu(f)$.*

Dans le cas où $\int \log h \, d\lambda = 0$ et h n'est pas un cobord λ-intégrable, ν est singulière. Dans le cas contraire, ν a une densité donnée par le théorème 3.1.

(5.9) Remarque : Les énoncés du théorème 5.6 et du corollaire 5.8 restent vérifiés si la fonction $\log h$ est homologue à une fonction g à variation bornée d'intégrale nulle, $\log h = g + T_\alpha \phi - \phi$, avec ϕ continue.

Notons également que, si $h > 0$ est majorée ainsi que son inverse, h est à variation bornée si et seulement si $\log h$ est à variation bornée.

Mesures quasi-invariantes et difféomorphismes du cercle

(5.10) Le résultat précédent peut être interprété comme un résultat sur les difféomorphismes du cercle, à l'aide de deux constructions équivalentes. Considérons d'abord un difféomorphisme ϕ du cercle de classe C^1 conjugué à une rotation T_α d'angle α par une application θ continue, $T_\alpha = \theta\phi\theta^{-1}$, soit :

$$\theta^{-1}(y + \alpha) = \phi(\theta^{-1}(y)), \ \theta(\phi(x)) = \theta(x) + \alpha.$$

Notons ν la mesure image par θ de la mesure de Lebesgue λ :

$$\nu(f) = \int f(\theta(y)) \, dy.$$

On a :

$$\begin{aligned}
T_\alpha^{-1}\nu(f) &= \int f(T_\alpha^{-1}(\theta(y)))\ dy \\
&= \int f(\theta(\phi^{-1}(y)))\ dy \\
&= \int f(\theta(x))\phi'(x)\ dx \\
&= \int f(\theta(x))\phi'(\theta^{-1}(\theta(x)))\ dx.
\end{aligned}$$

D'où, la propriété de quasi-invariance :

$$T_\alpha^{-1}\nu = h\nu,$$

avec $h(x) = \phi'(\theta^{-1}(x))$.

Inversement, soit h une fonction continue, telle que $\int \log h\ d\lambda = 0$. Il existe une mesure quasi-invariante ν, avec $T_\alpha^{-1}\nu = h\nu$. Définissons θ comme l'application inverse de la fonction de répartition, c'est-à-dire inverse de l'application $x \to \nu([0,x])$. Comme ν est une mesure de probabilité sans atome sur le cercle, θ est bien définie et est un homéomorphisme croissant du cercle. On a, par définition, $\theta^{-1}(x) = \nu([0,x])$.

Soit ϕ défini comme le conjugué par θ de la rotation d'angle α :

$$\phi = \theta^{-1}T_\alpha\theta.$$

Montrons que

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\phi(\theta^{-1}(x+\delta)) - \phi(\theta^{-1}(x))}{\theta^{-1}(x+\delta) - \theta^{-1}(x)} = h(x). \tag{5.10.1}$$

Ceci montrera que ϕ est dérivable, de dérivée $\phi'(x) = h(\theta(x))$.

D'après la relation $\phi\theta^{-1} = \theta^{-1}T_\alpha$, on a, pour $\delta > 0$:

$$\begin{aligned}
\phi(\theta^{-1}(x+\delta)) - \phi(\theta^{-1}(x)) &= \theta^{-1}(T_\alpha(x+\delta)) - \theta^{-1}(T_\alpha(x)) \\
&= \nu([x+\alpha, x+\alpha+\delta]) \\
&= \nu(T_\alpha^{-1}1_{[x,x+\delta]}) \\
&= \int 1_{[x,x+\delta]}(y)h(y)\ d\nu(y).
\end{aligned}$$

La relation (5.10.1) équivaut à

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\nu([x,x+\delta])} \int h(y)1_{[x,x+\delta]}(y)\ d\nu(y) = h(x),$$

qui est vérifiée pour tout x, d'après la continuité de h.

Considérons maintenant les deux systèmes dynamiques avec mesure quasi-invariante : (X, ϕ, λ) et (X, T_α, ν). Ils sont conjugués par l'application θ. Supposons $\log h$ variation bornée. Dans l'étude de la conjugaison des difféomorphismes du cercle, M. Herman [10] a montré l'ergodicité de la mesure de Lebesgue λ pour l'action de ϕ, ce qui entraîne que ν est ergodique pour l'action de la rotation T_α.

Exemple : Soit ϕ linéaire par morceaux (à deux pentes) :

$$\phi(x) = \begin{cases} bx & \text{si } x \in [0, a[, \\ b^{-1}(x-1)+1, & \text{si } x \in [a, 1[, \end{cases}$$

pour un $a \in]0, 1[$, avec la condition $a = \frac{b-1}{b^2-1}$, assurant le raccordement au point a.

Pour α irrationnel donné, en ajoutant à ϕ une translation convenable, on obtient un homéomorphisme du cercle linéaire par morceaux de nombre de rotation α. Cet exemple, étudié par M. Herman [10], correspond au modèle presque périodique décrit en (5.3).

6. Application à une chaîne de Markov sur $\mathbb{R}$

Montrons comment, à l'aide du théorème 5.6, on peut étudier un opérateur de transition correspondant à des translations aléatoires sur $\mathbb{R}$.

Soient $a_i, i = 1, 2, 3$, des réels > 0 et $r_i, i = 1, 2, 3$, des fonctions continues positives sur $\mathbb{R}$ telles que $\sum_i r_i(x) = 1$. On considère la marche aléatoire décrivant le mouvement d'une particule sur $\mathbb{R}$ qui passe de la position x à la position $x + a_i$ avec la probabilité $r_i(x)$.

L'opérateur associé est

$$Rf(x) = \sum_i r_i(x) f(x + a_i).$$

Nous ferons les hypothèses suivantes : $a_1 + a_2 = 0$, a_1 et $a_3 > 0$, $\alpha = a_1/a_3$ irrationnel.

En effectuant un changement de coordonnée $x \to a_3 x$, on se ramène au cas d'un opérateur de la forme :

$$Rf(x) = r_1(x)f(x + \alpha) + r_2(x)f(x - \alpha) + r_3(x)f(x + 1),$$

avec α irrationnel.

(6.1) Proposition : *Si la fonction r_1/r_2 est 1-périodique et si $\log(r_1/r_2)$ est à variation bornée d'intégrale nulle sur le cercle, il existe au plus une mesure de probabilité μ invariante par R.*

Preuve : Soit μ une mesure de probabilité invariante par R. Pour une fonction f continue 1-périodique, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} [r_1(x)f(x+\alpha) + r_2(x)f(x-\alpha) + r_3(x)f(x)]\ d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x).$$

Posons $p = \dfrac{r_1}{r_1+r_2}$, $q = \dfrac{r_2}{r_1+r_2}$ et soit $\widetilde{\mu} = \left(\int (r_1+r_2)\, d\mu\right)^{-1}(r_1+r_2)\mu$.
La relation précédente s'écrit

$$\int Pf\ d\widetilde{\mu} = \int f\ d\widetilde{\mu},\ \forall f \text{ 1-périodique continue},$$

où P est l'opérateur :

$$Pf(x) = p(x)f(x+\alpha) + q(x)f(x-\alpha).$$

Soit ν l'unique mesure de probabilité sur le cercle solution de l'équation de quasi-invariance (E) dans laquelle on prend $h = \dfrac{p}{Tq}$. La fonction $\log h$ diffère de la fonction $\log(r_1/r_2)$ par le cobord $\log q - T\log q$. Elle est donc d'intégrale nulle.

La forme linéaire $f \to \int_{\mathbb{R}} f(x)d\widetilde{\mu}(x)$ sur l'espace des fonctions continues 1-périodiques définit une mesure de probabilité de Radon sur le cercle qui est solution de l'équation de quasi-invariance (E). D'après le corollaire 5.8 et la remarque 5.9, elle coïncide donc avec ν.

Notons $\widetilde{\mu}_n$ la mesure sur $[0,1[$ translatée de la restriction de $\widetilde{\mu}$ à $[n, n+1[$,

$$\int_0^1 f(x)\ d\widetilde{\mu}_n(x) = \int_n^{n+1} f(x-n)\ d\widetilde{\mu}(x).$$

Si f est une fonction 1-périodique, on a :

$$\int_0^1 f(x)\sum_n d\widetilde{\mu}_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\widetilde{\mu}(x) = \int_0^1 f(x)\ d\nu(x).$$

Cette relation montre que les mesures $\widetilde{\mu}_n$ ont une densité θ_n par rapport à la mesure ν avec $\sum \theta_n(x) = 1$, ν-p.p..

Notons ν^* la mesure σ-finie sur $\mathbb{R}$ obtenue en transportant ν par translations entières. Nous avons $d\widetilde{\mu} = \theta d\nu^*$, avec $\theta(x) = \theta_n(x-n)$, pour $x \in [n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$; d'où la relation $\sum_n \theta(x+n) = 1$, ν-p.p..

La fonction θ est ν-presque partout non nulle, d'après l'ergodicité de la classe de ν. L'argument de la proposition 2.3 montre l'unicité de la mesure μ R-invariante.

□

Remarques : 1) Si elle existe, la mesure de probabilité μ R-invariante a une densité θ par rapport à la mesure ν^* construite dans la preuve précédente, vérifiant $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta(x+n) = 1$, ν-p.p..

2) Rappelons (cf. [20]) que l'existence d'une mesure de probabilité invariante par R sur $\mathbb{R}$ est assurée sous une hypothèse de "barrières réfléchissantes" qui s'écrit, en posant $w(x) = \sum_i a_i r_i(x)$: "*Il existe A tel que* $w(x) < 0$, pour $x > A$, et $w(x) > 0$, pour $x < -A$."

3) Nous avons vu au paragraphe 4 que la mesure ν est singulière pour des choix convenables de α et de fonctions h même très régulières. Cette construction montre qu'une affirmation de [25], sur l'existence d'une mesure équivalente à la mesure de Lebesgue pour des rotations aléatoires avec des poids continus > 0 sur le cercle, est incorrecte.

Références

[1] S. Alili : Processus de branchement et marche aléatoire en milieux désordonnés, thèse, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 1993.

[2] D. Anosov, On the additive homological equation associated with an irrational rotation of the circle, Izvestya Acad. Sci. USSR 37 (1973), p. 1259-1274.

[3] R. Bowen : *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lectures Notes in Math. 470 (1975), Springer Verlag.

[4] J. Brémont : Comportement des sommes ergodiques pour des rotations et des fonctions continues peu régulières, Publications des Séminaires de Rennes (1999).

[5] J.-P. Conze : Equirépartition et ergodicité de transformations cylindriques, Publications des Séminaires de Rennes (1976).

[6] J.-P. Conze, Y. Guivarc'h : Croissance des sommes ergodiques et principe variationnel, Preprint Rennes (1997).

[7] M. Denker, C. Grillenberger, K. Sigmund : *Ergodic theory on compact spaces*, Springer Lecture Notes, no 527.

[8] H. Federer : *Geometric measure theory*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, xvi (1996).

[9] Y. Guivarc'h, J. Hardy : Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov, Ann. I. H. P., sér. Proba. et Stat., v. 24 (1988), p. 73-98.

[10] M. R. Herman : Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. 49 (1979), p. 5-233.

[11] G. Halàsz : Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 28 (1976), p. 389-395.

[12] H. Kesten, M. V. Kozlov, F. Spitzer : A limit law for random walks in a random environment, Comp. Math., 30 (1975), p. 145-168.

[13] S. M. Kozlov : The method of averaging and walks in inhomogeneous environments, Russian Math. Survey 40, no 2 (1985), p. 73-145.

[14] S. M. Kozlov, S. A. Molchanov : On conditions for applicability of the central limit theorem to random walks on a lattice, Soviet Math. Dokl., vol. 30, no 2 (1984), p. 410-413.

[15] M. A. Krasnosel'skii : *Positive solutions of operator equations*, Noordhof, Groningen, (1964).

[16] U. Krengel : *Ergodic theorems*, De Gruyter Studies in math., Berlin, New York (1985).

[17] A. V. Letchikov : A criterion for applicability of the CLT to one-dimensional random walks in random environments, Theory of Proba. and Appl., v. 37, no 3 (1992), p. 553-557.

[18] W. de Melo, S. van Strien : *One-dimensional dynamics*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 25 (1993) Springer-Verlag.

[19] S. A. Molchanov : *Lectures on random media*, in : Lectures on Probability theory, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour, XXII (1992).

[20] M. F. Norman : *Markov process and learning models*, Academic Press, New York (1972).

[21] Y. Peres : A combinatorial application of the maximal ergodic theorem, Bull. London Math. Soc., 20 (1988), p. 248-252.

[22] Ya. G. Sinai : Construction of Markov partitions, Functional Analys. and Appl., 2 (1968), p. 70-80.

[23] Ya. G. Sinai : The limiting behaviour of a one-dimensional random walk in a random environment, Theory Proba. and Appl., v. 27 (1982), p. 256-268.

[24] Ya. G. Sinai : Simple random walks on Tori, preprint.

[25] R. Sine : On invariant probabilities for random rotations, Israel Journal of Math., v. 33 (1979), p. 384-388.

[26] F. Solomon : Random walks in a random environment, Annals of Probability, 3 (1975), p.1-31.

Jean-Pierre Conze
IRMAR, Université de Rennes I,
Campus de Beaulieu,
35042, Rennes Cedex, France

Jean-Pierre.Conze@univ-rennes1.fr

Yves Guivarc'h
IRMAR, Université de Rennes I,
Campus de Beaulieu,
35042, Rennes Cedex, France

Yves.Guivarch@univ-rennes1.fr