Construction d'une fonction qui est un cobord de grande variance sur le cercle

Jean-Pierre Conze

IRMAR, Université de Rennes I

Introduction

Soit (γ_n) une suite de réels > 0 tendant vers 0. On se propose de construire pour toute rotation d'angle α irrationnel $x \to x + \alpha \bmod 1$: une fonction f continue sur le cercle qui est un cobord pour T_α : $f = \varphi - T_\alpha \varphi$ avec φ mesurable et telle que $\|S_n f\|_2 \geq \gamma_n n$.

On a noté $S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} T_\alpha^k f$ les sommes ergodiques de f.

L'existence d'une fonction f vérifiant les propriétés ci-dessus entraîne que, pour toute suite (γ_n) de réels > 0 tendant vers 0, il existe des processus (X_n) strictement stationnaires de carré intégrable vérifiant le TCL, convergence en loi

$$\frac{X_0 + X_1 + ... + X_{n-1}}{\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0, 1),$$

mais tels que

$$\|X_0 + X_1 + ... + X_{n-1}\|_2 \geq \gamma_n \, n.$$

En terme de système dynamique, on obtient un tel processus en faisant le produit d'un système dynamique dans lequel existe une fonction g vérifiant le TCL avec convergence vers la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ par une rotation sur le cercle et en considérant le processus $(g(T^n x) + f(T_\alpha^n y))$, où f vérifie les propriétés ci-dessus.

D. Anosov a construit des angles α et des fonctions f analytiques sur le cercle qui sont des cobords, $f = \varphi - T_\alpha \varphi$, avec φ mesurable non intégrable (cf. D. V. Anosov : The additive functional homology equation that is connected with an ergodic rotation of the circle, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 37 (1973), p. 1259-1274). La construction qui suit redonne l'existence de telles fonctions.

Soit α à quotients partiels bornés. On sait que, si f est C^1, alors f est un cobord $f = \varphi - T_\alpha \varphi$, avec φ dans L^2. Ceci, de même que l'inégalité de Denjoy-Koksma, montre que la construction de fonctions de grande variance, avec une condition de régularité, ne peut être effectuée sans conditions diophantiennes. Nous verrons cependant que des fonctions analytiques peuvent être, pour des angles bien choisis, de grande variance le long d'une sous-suite.

1 Construction

On part d'une fonction "plateau" f_0 C^∞ et à support dans $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, $f_0 \geq 0$, $\|f_0\|_\infty = 1$, et de la suite (f_k) à support dans $[-\frac{\varepsilon_k}{4}, \frac{\varepsilon_k}{4}]$, définie par

$$f_k(x) = f_0(\frac{x}{\varepsilon_k}), \text{ avec } \varepsilon_k > 0 \text{ et } \sum_k \epsilon_k < \infty. \tag{1}$$

On prendra $\varepsilon_k = k^{-\delta}$, où δ est une constante > 1. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \|f_k\|_\infty &= 1,\ \|f_k\|_2 = ak^{-\frac{1}{2}\delta}, \\ \|f_k'\|_\infty &= bk^\delta,\ \|f_k''\|_\infty = ck^{2\delta}, \end{aligned}$$

avec $a = \|f_0\|_2$, $b = \|f_0'\|_\infty$, $c = \|f_0''\|_\infty$.

On note $f_{k,d} = J_d * f_k$ une approximation de f_k par un polynôme trigonométrique de degré $2d$ donné par la convolution par le noyau Jackson J_d d'ordre d. Rappelons que

$$J_d = \|F_d\|_2^{-2} F_d^2,$$

où F_d est le noyau de Fejer d'ordre d, et que nous avons, pour une constante c_1 :

$$\|f_k - f_{k,d}\|_\infty \leq \|f_k'\|_\infty \frac{c_1}{d} = bc_1 k^\delta\, d^{-1}. \tag{2}$$

Etant données deux suites (ℓ_k) et (d_k) d'entiers ≥ 1, dont le choix sera précisé ultérieurement, on pose :

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= f_{k,d_k}(x), \\ \varphi_k(x) &= e^{2\pi i \ell_k x}\psi_k(x), \end{aligned}$$

On a compte-tenu de la forme de l'approximation $\psi_k = J_{d_k} * f_k$:

$$\begin{aligned} \|\varphi_k\|_\infty &= \|\psi_k\|_\infty \leq \|f_k\|_\infty = 1, \\ 2\pi\ell_k\|f_k\|_2 - \|f_k'\|_\infty \leq \|\varphi_k'\|_2 &\leq 2\pi\ell_k\|f_k\|_2 + \|f_k'\|_\infty, \\ 2\pi\ell_k\|f_k\|_\infty - \|f_k'\|_\infty \leq \|\varphi_k'\|_\infty &\leq 2\pi\ell_k\|f_k\|_\infty + \|f_k'\|_\infty, \\ \|\varphi_k''\|_\infty &\leq 4\pi^2\ell_k^2\|f_k\|_\infty + 4\pi\ell_k\|f_k'\|_\infty + \|f_k''\|_\infty. \end{aligned}$$

Pour ℓ_k assez grand ($\ell_k \geq Ck^\delta$, avec une constante convenable C) nous avons les inégalités :

$$\begin{aligned} \pi\ell_k\|f_k\|_2 = a\pi\ell_k k^{-\frac{1}{2}\delta} \leq \|\varphi_k'\|_2 &\leq 4a\pi\ell_k k^{-\frac{1}{2}\delta} = 4\pi\ell_k\|f_k\|_2, \\ \pi\ell_k \leq \|\varphi_k'\|_\infty &\leq 4\pi\ell_k, \\ \|\varphi_k''\|_\infty &\leq 8\pi^2\ell_k^2. \end{aligned}$$

On note (t_k) une suite de réels de la forme

$$t_k = d_k k^{-2\delta}, \tag{3}$$

ce qui assure, d'après (2), la convergence $\sum_k t_k\|f_k - f_{k,d_k}\|_\infty < \infty$.

L'invariance de la mesure de Lebesgue par les transformations $x \to r_k x \bmod 1$, pour r_k entier, la condition (1) et le choix de (t_k) assurent par le lemme de Borel-Cantelli, pour tout choix des suites d'entiers (ℓ_k) et (r_k), la convergence presque partout de la série

$$\sum_k e^{2\pi i \ell_k r_k x} t_k \psi_k(r_k x).$$

Nous choisissons les entiers ℓ_k de façon que $\ell_{k+1} - 2d_{k+1} > \ell_k + 2d_k$, pour tout $k \geq 1$ ($2d_k$ est le degré du polynôme ψ_k). On peut prendre ℓ_k de l'ordre de $2k^r d_k$, pour r entier ≥ 1. Ainsi les polynômes $e^{2\pi i \ell_k \cdot}\psi_k$ sont décorrélés et ceci reste vrai, pour les polynômes $e^{2\pi i \ell_k r_k \cdot}\psi_k(r_k .)$, pour toute suite croissante (r_k). De même que (ℓ_k) et (d_k), la suite (r_k) sera choisie ultérieurement.

Définissons φ et f par

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} t_k \varphi_k(r_k x), \\
f(x) &= \varphi(x) - \varphi(x+\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k[\varphi_k(r_k x) - \varphi_k(r_k x + r_k \alpha)].
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, φ est non intégrable, finie pour presque tout x. Nous avons, pour p entier ≥ 1, d'après la décorrélation et l'invariance de la mesure l'égalité (5) suivante :

$$\begin{aligned}
\|S_p f\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} t_k^2 \, \|\varphi_k(r_k .) - \varphi_k(r_k . + p r_k \alpha)\|_2^2 && (4)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} t_k^2 \, \|\varphi_k(.) - \varphi_k(. + p r_k \alpha)\|_2^2. && (5)
\end{aligned}$$

Pour un réel u, notons $((u)) = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |u-n|$. Nous choisissons pour (r_k) une sous-suite de la suite (q_j) des convergents de α, $r_k = q_{j_k}$. On notera pour simplifier $s_k = q_{j_k+1}$. Rappelons que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q_j + q_{j+1}} &\leq ((q_j\alpha)) \leq \frac{1}{q_{j+1}}, \\
\text{d'où } \frac{1}{2s_k} &\leq ((r_k\alpha)) \leq \frac{1}{s_k}.
\end{aligned}$$

Dans la somme (5), on se restreint aux termes d'indice k tels que $p/s_k \leq 1$ et on effectue un développement à l'ordre 1. On obtient une minoration de la forme :

$$\begin{aligned}
\|S_p f\|_2^2 &\geq p^2 \sum_{k: s_k \geq p} ((r_k\alpha))^2 t_k^2 \, \|\varphi_k'\|_2^2 (1-\delta_{k,p})^2 && (6)\\
&\geq \frac{1}{4} p^2 \sum_{k: s_k \geq p} (\frac{t_k}{s_k})^2 \, \|\varphi_k'\|_2^2 (1-\delta_{k,p})^2 && (7)
\end{aligned}$$

où $\delta_{k,p}$ est majoré de la façon suivante :

$$0 \leq \delta_{k,p} \leq \frac{1}{2}\frac{p}{s_k}\frac{\|\varphi_k''\|_\infty}{\|\varphi_k'\|_2}.$$

Choix de la suite (q_{j_k})

Etant donnée une suite croissante (B_k) tendant vers $+\infty$, notons (λ_k) une suite telle que

$$k \geq \lambda_p \Rightarrow B_k \geq p. \tag{8}$$

En ne gardant dans (7) que les termes k appartenant à l'ensemble I_p défini par

$$I_p = \{k : 8\pi p \frac{\ell_k}{s_k} \leq 1\},$$

on obtient la minoration :

$$\|S_p f\|_2^2 \geq \frac{1}{16} p^2 \sum_{k \in I_p} (\frac{t_k}{s_k})^2 \, \|\varphi'_k\|_2^2. \tag{9}$$

Supposons que $r_k = q_{j_k}$ soit tel que, pour tout entier $k \geq 1$, $s_k = q_{j_k+1}$ vérifie

$$s_k \frac{\|\varphi'_k\|_2}{\|\varphi''_k\|_\infty} \geq B_k. \tag{10}$$

On a alors, pour $k \geq \lambda_p$, $k \in I_p$, d'après (8) ; d'où :

$$\|S_p f\|_2^2 \geq \frac{1}{16} p^2 \sum_{k \geq \lambda_p} (\frac{t_k}{s_k})^2 \, \|\varphi'_k\|_2^2 \geq \frac{\pi^2 a^2}{16} \sum_{k \geq \lambda_p} (\frac{d_k \ell_k}{s_k})^2 k^{-5\delta}. \tag{11}$$

Pour avoir (10), il suffit d'avoir :

$$s_k \geq \frac{8}{a} B_k \pi k^{\frac{1}{2}\delta} \ell_k. \tag{12}$$

Pour le choix de $r_k = q_{j_k}$, on veut également que la convergence à droite dans (11) soit lente, par ailleurs, il faut la continuité de f, ce qui est assuré par la condition

$$\sum_k \frac{t_k}{s_k} \|\varphi'_k\|_\infty < \infty. \tag{13}$$

On prend, pour avoir (13) : $\frac{t_k}{s_k} \|\varphi'_k\|_\infty \leq k^{-\delta}$, soit, d'après (3),

$$\frac{s_k}{\ell_k} \geq \pi d_k k^{-\delta}.$$

On choisit $\frac{s_k}{\ell_k} = \pi d_k k^{-\delta}$ et on prend d_k assez grand pour que l'inégalité (12) soit vérifiée, i.e. :

$$d_k \geq \frac{8}{a} B_k \; k^{\frac{3}{2}\delta}.$$

Par ailleurs, la variance est minorée d'après (11) par :

$$\begin{aligned} \|S_p f\|_2^2 \quad &\geq \quad a^2 \frac{\pi^2}{16} p^2 \sum_{k \geq \lambda_p} (d_k k^{-2\delta})^2 (\frac{\ell_k}{s_k})^2 k^{-\delta} \\ &= \quad \frac{a^2}{16} p^2 \sum_{k \geq \lambda_p} k^{-3\delta} \geq \frac{a^2}{16} p^2 \lambda_p^{1-3\delta}. \end{aligned}$$

On note que les conditions de minoration sur la suite (ℓ_k) peuvent être assurée par un choix adéquat de la suite (s_k).

La convergence vers 0 peut être rendue arbitrairement lente. La suite (γ_p) de réels > 0 tendant vers 0 étant donnée, on peut choisir la suite (B_p) tendant vers l'infini telle que la somme précédente soit minorée par $p^2\gamma_p$.

On a ainsi montré :

Proposition 1.1 *Pour tout irrationnel α, et toute suite (γ_p) de réels > 0 tendant vers 0, il existe f continue telle que $f = \varphi - T_\alpha\varphi$ avec φ mesurable et $\|S_n f\|_2 \geq \gamma_n n$, pour tout n suffisamment grand.*

2 Cas des fonctions régulières

La construction précédente a été effectuée pour tout irrationnel α. Si l'on cherche une fonction f C^∞, ou seulement C^1, ayant des propriétés analogues, il faut imposer à α des conditions diophantiennes.

Rappelons que, d'après l'inégalité de Denjoy-Koksma, si f est à variation bornée nous avons, en notant $V(f)$ la variation d'une fonction f :

$$|\sum_{k=0}^{q_n-1} f(x+k\alpha) - \int_0^1 f(y)\,dy| \leq V(f).$$

Utilisons le développement de α en fraction continue,

$$\begin{aligned} \alpha &= [0; a_1, a_2, ..., a_n, ...] \\ q_{n+1} &= a_n q_n + q_{n-1}, \end{aligned}$$

et l'écriture d'un entier n en "base" (a_n) :

$$n = b_r q_r + b_{r-1} q_{r-1} + ... + b_1 q_1,$$

avec $r = \max(k : q_k \leq n)$ et $b_i \leq a_i$, $i = 1, ..., r$.

Nous obtenons un majorant des sommes ergodiques pour la rotation $x \to x + \alpha$ mod 1 et f à variation bornée :

$$\|S_n f\|_\infty \leq V(f) \sum_{i=1}^{r} a_i.$$

Ceci entraîne en particulier :
a) pour tout irrationnel α, $\|S_{q_n} f\|_\infty \leq V(f)$,
b) si α est à quotients partiels bornés (i.e. $\sup_n a_n < \infty$), alors il existe une constante C telle que, pour toute f à variation bornée, $\|S_n f\|_\infty \leq CV(f)\mathrm{Log} n$.

La variance d'une fonction régulière, par exemple C^1, reste donc bornée le long de la suite (q_n) associée à α et ceci quel que soit α.

On peut adapter la construction donnée plus haut pour obtenir α et une fonction f analytique qui soit un cobord, $f = \varphi - T_\alpha\varphi$, avec φ mesurable finie presque-partout et non intégrable.

Pour cela on utilise la construction, en utilisant des angles α du type Liouville, pour lesquels on a une majoration

$$\frac{k^{-\delta}}{s_k} \leq \exp(-((\ell_k + d_k)r_k).$$

La construction de tels α à partir de leur développement en fraction continue (choix des a_k) est possible. Naturellement, on perd la propriété de croissance de la variance, la suite (s_k) croissant beaucoup plus vite que $(\ell_k d_k)$.

On peut cependant, pour des fonctions analytiques, construire des angles α tels que la variance $\|S_n f\|_2$ soit grande pour une infinité de valeurs de n.

Notons g la fonction analytique 1-périodique

$$g(x) = \sum_0^\infty e^{-j} e^{2\pi i j x} = \frac{1}{e^{-1+2\pi i x}}.$$

Proposition 2.1 *Pour toute suite (γ_k) tendant vers 0, il existe des angles α tels que l'inégalité $\|S_n g\|_2 \geq n\gamma_n$ soit vérifiée pour une infinité d'indices n.*

Preuve : Soit (p/q) une fraction irréductible. Notons c_k les coefficients de Fourier de g et $S_{n,q}g(x)$ la somme $\sum_0^{n-1} g(x + kp/q)$. La fonction g étant lipchitzienne, nous avons la majoration

$$\|S_n g - S_{n,q} g\|_\infty \leq Cn^2|\alpha - p/q|.$$

Il en résulte :

$$\|S_n g\|_2 \geq n|c_q| - Cn^2|\alpha - p/q|.$$

Construisons l'angle α à partir de son développement en fraction continue. Supposons déja construits $a_1, a_2, ..., a_{k-1}$. Prenons $n = n_j$ tel que $e^{-q_k} \geq \frac{1}{2}\gamma_n$. Nous choisissons a_k tel que $q_{k+1} = a_k q_k + q_{k-1}$ vérifie :

$$C\frac{n^2}{q_k q_{k+1}} \leq \frac{1}{2} n\gamma_n.$$

L'inégalité $\|S_n g\|_2 \geq n\gamma_n$ est alors vérifiée pour la suite (n_j) de valeurs de n.

□