Géométrie au Capes 2007-2008
Solution de l'exercice 12

Avant de résoudre l'exercice énonçons des versions simplifiées de deux énoncés enseignés au collège et liés à la proportionalité.

Théorème de Thalès Soit (A, B, C) un triangle non dégénéré d'un plan affine euclidien et soit $B' \in]A, B[$ et $C' \in]A, C[$. Si les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles alors

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}.$$

Réciproque du théorème de Thalès Soit (A, B, C) un triangle non dégénéré d'un plan affine euclidien et soit $B' \in]A, B[$ et $C' \in]A, C[$. Si

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

alors les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles.

Avant de donner la preuve du théorème de Thalès qui est l'objet de l'exercice 12 montrons comment déduire du théorème de Thalès sa réciproque. Nous considérons donc un triangle (A, B, C) d'un plan affine euclidien et $B' \in]A, B[$ et $C' \in]A, C[$ tels que

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}.$$

Supposons qu'il existe $C'' \in]A, C[$ tels que (BC) et $(B'C'')$ soient parallèles. D'après le théorème de Thalès on a

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC''}{AC}.$$

Or on a aussi supposé que

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}.$$

Par conséquent on aurait

$$AC' = \frac{AB'}{AB}AC = AC''.$$

Mais deux points de l'intervalle $]A, C[$ situés à la même distance de A sont égaux. Par conséquent $C' = C''$ et les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles.

Il reste à expliquer pourquoi il existe bien $C'' \in]A, C[$ tels que (BC) et $(B'C'')$ soient parallèles.

La preuve va reposer sur les propriétés de convexité suivantes. Un point sur une droite la sépare en deux demi-droites fermées qui ont ce point comme unique point commun. L'intersection de deux demi-droites fermées incluses dans une droite est soit vide, soit une des deux demi-droites, soit un segment éventuellement réduit à un point. Une droite du plan sépare le plan en deux demi-plans fermés qui s'intersectent suivant cette droite. Celle-ci est leur bord commun. L'intersection d'une droite et d'un demi-plan fermé est soit vide, soit la droite elle même, soit une demi-droite. Un triangle plein de sommet (A, B, C) est l'intersection de trois demi-plans fermés et bordés par les droites (AB), (BC) et (CA).

Une conséquence immédiate de ces propriétés est que l'intersection d'une droite du plan et d'un triangle plein, si elle ni vide ni réduite à un sommet du triangle contient un segment qui possède deux extrémités distinctes, ces deux extrémités étant situées sur le bord du triangle. Or on sait qu'il existe une unique droite δ qui passe par B' et qui est parallèle à (BC). Puisque δ est parallèle à (BC) qui est sécante à (AB) la droite δ et aussi sécante à (AB). Par conséquent $\delta \cap (AB) = \{B'\}$. Puisque B' n'est pas un sommet du triangle plein de sommets A, B et C, l'intersection de δ avec ce triangle plein est un segment K qui a deux extrémités distinctes. Ces extrémités appartiennent à $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$. L'une d'elles notée C'' est différente de B'. Puisque par deux points passe une et une seule droite on a $\delta = (B'C'')$. Le point C'' ne peut appartenir à (BC) ou à (AB) car sinon les droites (BC) et $\delta = (B'C'')$ seraient concourantes. Par conséquent $C'' \in]A, C[$.

exercice 12 1. Le triangle (B', C', A) admet $B'H$ comme hauteur associée à la base AC' et le triangle (B', C, C') admet $B'H$ comme hauteur associée à la base $C'C$. Par conséquent

$$\mathrm{A}ire(B', C', A) = \frac{1}{2} AC' \cdot B'H, \ \mathrm{A}ire(B', C, C') = \frac{1}{2} C'C \cdot B'H.$$

2. Le triangle (B', C', A) admet $C'J$ comme hauteur associée à la base AB' et le triangle (B', B, C') admet $C'J$ comme hauteur associée à la base

$B'B$. Par conséquent

$$\mathrm{A}ire(B', C', A) = \frac{1}{2}AB' \cdot C'J, \ \mathrm{A}ire(B', B, C') = \frac{1}{2}B'B \cdot C'J.$$

3. Puisque les droites (BI) et (CK) sont parallèles et qu'elles sont orthogonales aux droites parallèles (BC) et $(B'C')$ on en déduit que $BI = CK$ est la distance entre les deux droites. Le triangle (B', C, C') admet CK comme hauteur associée à la base $B'C'$ et le triangle (B', B, C') admet BI comme hauteur associée à la base $B'C'$. Par conséquent

$$\mathrm{A}ire(B', C, C') = \frac{1}{2}B'C' \cdot CK = \frac{1}{2}B'C' \cdot BI = \mathrm{A}ire(B', B, C')$$

c'est à dire

$$\mathrm{A}ire(B', C, C') = \mathrm{A}ire(B', B, C').$$

4. De la question 1 on déduit que

$$\frac{AC'}{C'C} = \frac{\mathrm{A}ire(B', C', A)}{\mathrm{A}ire(B', C, C')}.$$

De la question 2 on déduit que

$$\frac{AB'}{B'B} = \frac{\mathrm{A}ire(B', C', A)}{\mathrm{A}ire(B', B, C')}.$$

D'après la question 3 on a $\mathrm{A}ire(B', C, C') = \mathrm{A}ire(B', B, C')$. Par conséquent

$$\frac{AC'}{C'C} = \frac{AB'}{B'B}.$$

5. Puisque $B' \in]A, B[$ l'inégalité triangulaire devient une égalité et $AB = AB' + B'B$. De même, puisque $C' \in]A, C[$ l'inégalité triangulaire devient une égalité et $AC = AC' + C'C$.

6. D'après la question 4, en passant aux inverses on a

$$\frac{C'C}{AC'} = \frac{B'B}{AB'}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{AC}{AC'} &= \frac{AC' + C'C}{AC'} = \frac{AC'}{AC'} + \frac{C'C}{AC'} = 1 + \frac{C'C}{AC'} \\
&= 1 + \frac{B'B}{AB'} = \frac{AB'}{AB'} + \frac{B'B}{AB'} = \frac{AB' + B'B}{AB'} = \frac{AB}{AB'}.
\end{aligned}$$

En passant aux inverses on obtient

$$\frac{AC'}{AC} = \frac{AB'}{AB}.$$