Nom :
Prénom :

Université de Rennes 1
M1 MEFF Maths (2014-2015)
Algèbre, Géométrie, Algorithmique II
Contôle continu 1 (15 minutes)

On composera exclusivement sur cette feuille. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction. Les documents sont interdits ainsi que les appareils électroniques.

Exercice 1.
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = 4x(1-x)$. Soit $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f_0 = f$ et si $k \in \mathbf{N}$, $f_{k+1} = f \circ f_k$.
1. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
2. Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbf{N}}$ ne prend ni la valeur 0 ni la valeur $3/4$. Soit $l \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Montrer que si $\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = l$ alors $l = -\infty$.

Exercice 2.
Soit $(d_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \{0,1\}^{\mathbf{N}}$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ tels que pour tout $n \geq p$ on a $d_{n+q} = d_n$.
1. Montrer que $t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{2^n}$ est rationnel.
2. Montrer la réciproque.