Chapitre 1

Construction du Mouvement Brownien

1 Un peu d'histoire (voir [7] et [1])

Le nom de mouvement Brownien vient du botaniste Robert Brown. Brown n'a pas découvert le mouvement brownien, car n'importe qui regarde dans un miscroscope peut voir le mouvement rapide et irrégulier des particules de pollen en suspension dans de l'eau. Cependant, avant lui on pensait que les particules étaient vivantes. Une autre théorie expliquait que le mouvement des particules étaient dû à la différence de température entre l'eau et le milieu ambiant provoquant l'évaporation de l'eau, ainsi qu'aux courants d'air. Brown (1828) réfuta ces théories et établit que les particules étaient inanimées. Il expliqua que la matière était composée de petites particules, appelées molécules actives, qui montrent un mouvement rapide et irrégulier, dont l'origine vient des particules. Puis au début des années 1900, le mouvement brownien fut caractérisé de la façon suivante :

- Le mouvement est très irrégulier, composé de translations et de rotations, la trajtoire ne semble pas avoir de tangentes.
- Deux particules semblent bouger de façon indépendantes, même si elles sont très proches.
- Le mouvement est d'autant plus actif que les particules sont petites.
- La composition et la densité des particules n'ont pas d'influence.
- Le mouvement est d'autant plus actif que le fluide n'est pas trop visqueux.
- Le mouvement est plus actif en température haute.
- Le mouvement est sans fin.

En 1905, la théorie cinétique, expliquant que le mouvement brownien des particules microscopiques est dû au bombardements des molécules du fluide, semble la plus plausible.
La mise en évidence du mouvement brownien comme processus stochastique est dû indépendamment au mathématicien français Louis Bachelier (1900) et Albert Einstein en (1905). Bachelier dans sa thèse *Théorie de la spéculation* avait pour but la modélisation de la dynamique des actifs boursiers et son application au calcul de prix d'option. Il obtient la loi du mouvement brownien à un instant donné. Il met surtout en évidence le caractère markovien du mouvement brownien : le déplacement d'une particule brownienne après un instant t de dépend que de l'endroit où elle était à l'instant t et mais pas de comment elle est arrivée à ce point. Par ailleurs, Einstein, qui ignorait l'existence de ce débat, formula une théorie quantitative en 1905 du mouvement brownien. Einstein réussi à expliquer la nature du mouvement et donna la valeur du coefficient de diffusion (sous certaines hypothèses). La méthode d'Einstein repose sur des considérations de mécanique statistique qui le conduit à l'équation de la chaleur puis à la densité gaussienne,

solution fondamentale de cette équation.
L'existence du mouvement brownien en tant que processus stochastique a été établie de façon rigoureuse par Wiener en 1923. Paul Lévy magnifiera cet objet en entamant une étude fine du comportement de ses trajectoires jusque dans les années 1930-1960. En 1944, Itô construit l'intégrale stochastique et développa le calcul stochastique.

2 Rappels sur les variables gaussiennes

Considérons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit un loi $\mathcal{N}(0,1)$ si $\mathbb{P}(N \in dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.
Estimation de la queue gaussienne : pour $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N \geq x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} t e^{-t^2/2} dt \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

Transformation de Laplace-Fourier : pour $z \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{E}[e^{zN}] = \exp(z^2/2).$$

Pour $m \in \mathbb{R}$ and $\sigma > 0$, $N' = m + \sigma N$ suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, de densité $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ et de tranformée de Fourier $\mathbb{E}[e^{zN'}] = \exp(zm + \sigma^2 z^2/2)$.

Remarque 2.1
1. Si X et X' sont des variables indépendantes de loi respectives $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m', \sigma'^2)$, alors $X + X'$ suit la loi $\mathcal{N}(m + m', \sigma^2 + \sigma'^2)$.
2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables gaussiennes, $X_n \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi ssi $m_n \to m \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n^2 \to \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$, et alors la loi limite est $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Preuve. Il suffit d'utiliser les fonctions caractéristiques.

△

Vecteurs gaussiens :
Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, avec $d \geq 1$. X est dit *gaussien* si toute combinaison linéaire de ses composantes est une v.a. gaussienne :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^d \quad < \lambda, X >= \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_d X_d \quad \text{suit une loi gaussienne.}$$

La loi d'un vecteur aléatoire gaussien X est entièrement déterminé par son vecteur espérance $m = E(X) \in \mathbb{R}^d$ et sa matrice de covariance $\Gamma = \mathbb{E}[(X-m).(X-m)^t]$. On note $X \overset{Loi}{=} \mathcal{N}(m, \Gamma)$. La matrice Γ est symétrique semi-définie positive (pas forcément inversible). On a

$$\Gamma_{ij} = cov(X_i, X_j) = \mathbb{E}\left[(X_i - \mathbb{E}(X_i))\,(X_j - \mathbb{E}(X_j))\right].$$

Sa fonction caractéristique est

$$\mathbb{E}[\exp(i < u, X >)] = \exp\left(i < u, m > -\frac{1}{2} u^t.\Gamma.u\right)$$

Par ailleurs, X admet une densité f_X par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ ssi Γ est inversible. La densité s'écrit alors

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det \Gamma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^t.\Gamma^{-1}.(x-m)\right).$$

Soit X un vecteur gaussien, Ses coordonnées sont indépendantes ssi la matrice covariance est diagonale ($\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]$ pour $i \neq j$.)

3 Le mouvement brownien

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Un processus stochastique est une famille indexée par le temps $(X_t)_{t\in[0,+\infty)}$ de variables aléatoires définies sur l'espace Ω.

Définition 3.1 Un processus X est dit *stationnaires*, si $\forall t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ et $s \geq 0$, $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \overset{Loi}{=} (X_{t_1+s}, \ldots, X_{t_n+s})$.
Un processus X est dit *à accroissement indépendants*, si $\forall t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendants.
Un processus X est dit *gaussien*, si $\forall t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.
Un processus X est dit *continu* (ou *p.s. continu*) si la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue pour tout $\omega \in \Omega$ fixé (ou $\omega \in \Omega'$ avec $\Omega' \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(\Omega') = 1$).
Les *lois finis dimensionnelles* d'un processus X est l'ensemble des lois conjointes $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$, pour tout $n \geq 1$ et $\forall t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$.

Définition 3.2 Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ une famille de v.a. indéxée par le temps. On dit que B est un *mouvement brownien* si c'est un processus continu tel que

i) $\forall t \geq 0$, $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$,

ii) si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, les v.a. $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

Par conséquent, $B_0 = 0$.

Remarque 3.3 cherchons la loi d'un accroissement $B_{t+s} - B_t$, pour $t, s \geq 0$:
On remarque que $B_{t+s} = B_t + B_{t+s} - B_t$, avec $B_{t+s} \sim \mathcal{N}(0, t+s)$ et $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, donc par indépendance, en calculant la fonction caractéristique de $B_{t+s} - B_t$, on obtient

$$B_{t+s} - B_t \overset{Loi}{=} B_s \text{ et } B_{t+s} - B_t \text{ est indépendant de } B_t.$$

Le mouvement brownien a des accroissements indépendants et stationnaires. De plus, comme les accroissements sont gaussiens, B est un *processus gaussien.*

<u>Covariance du brownien :</u>
Si $s \leq t$, $\mathbb{E}[B_t B_s] = \mathbb{E}[(B_s + (B_t - B_s))B_s] = s + 0$. De même, si $t \leq s$, $\mathbb{E}[B_t B_s] = t$. Donc

$$\mathbb{E}[B_t B_s] = t \wedge s.$$

Définition 3.4 (équivalente)
Un mouvement brownien est un processus continu gaussien centré indexé par $[0, +\infty[$ de covariance $t \wedge s$.

4 Construction du mouvement brownien

4.1 Principe d'invariance de Donsker(voir [5] et [1])

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d centrée et de variance égale à 1.
D'après le T.L.C., en posant $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, on a

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\overset{Loi}{\longrightarrow}} \mathcal{N}(0, 1).$$

En notant $[x]$ la partie entière de $x \in \mathbb{R}$, pour $t \in \mathbb{R}^+$, pour n assez grand on a

$$\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} \simeq \sqrt{t}\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{[nt]}} \underset{n\to+\infty}{\overset{Loi}{\longrightarrow}} \mathcal{N}(0, t).$$

On remarque que $S_{[n(t+s)]} - S_{[nt]} = X_{[nt]+1} + \ldots + X_{[n(t+s)]}$, alors que $S_{[nu]}$, pour $u \leq t$, ne dépend que $X_1, \ldots, X_{[nt]}$, par conséquent il y a indépendance des accroissements.

La suite de processus $\left(\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} - \left(\frac{nt-[nt]}{\sqrt{n}}\right) X_{[nt]+1}, t \geq 0\right)_{n \in I\!N}$ converge vers le mouvement brownien.... mais à l'heure actuelle, nous n'avons pas les outils pour le prouver (on a besoin d'étudier la tension de la suite + convergence des lois fini-dimensionnelles).

4.2 Construction de Paul Lévy

L'idée est de construire le mouvement brownien B sur l'intervalle de temps $[0,1]$ par approximation en utilisant les fonctions de Schauder $f_{k,n}$:

$f_{k,n}$ est une fonction triangle sur $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ telle que $f(k2^{-n} + 2^{-n-1}) = 2^{-(n+2)/2}$.

Considérons $N_{-1}, N_{0,0}, N_{1,0}, \ldots, N_{k,n}, \ldots$, avec $n \in I\!N$ et $k = 0, \ldots, 2^n - 1$, des variables gaussiennes $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes.
Pour $t \in [0,1]$, on définit $B_t^{-1} = tN_{-1}$ et

$$B_t^n = tN_{-1} + \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{2^l-1} N_{k,l} f_{k,l}(t).$$

On montre que p.s. la suite B^n converge uniformément en temps sur $[0,1]$ vers un mouvement brownien B. De plus, B est alors p.s. continu comme limite uniforme de fonctions continues.
Preuve.

i) Convergence uniforme

On a

$$B_t^n = B_t^{n-1} + \sum_{k=0}^{2^n-1} N_{k,n} f_{k,n}(t).$$

Comme les fonctions $f_{k,n}$ à n fixé sont disjointes, on remarque alors que

$$\sup_{t\in[0,1]} |B_t^n - B_t^{n-1}| = \sup_{k=0,\ldots,2^n-1} |N_{k,n}| 2^{-(n+2)/2}$$

Les variables $N_{k,n} 2^{-(n+2)/2}$ ont toutes la même loi, et en majorant par la somme des probas, en introduisant $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ on obtient

$$\begin{aligned} I\!P(\sup_{t\in[0,1]} |B_t^n - B_t^{n-1}| > \frac{1}{n^2}) &\leq 2^n \; I\!P(|N| > \frac{2^{(n+2)/2}}{n^2}) \\ &\leq \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi}} e^{-2^{n+2}/2n^4} \end{aligned}$$

Par conséquent la série $\sum I\!P(\sup_{t\in[0,1]} |B_t^n - B_t^{n-1}| > 1/n^2)$ est convergente, donc par Borel Cantelli, p.s. pour n assez grand

$$\sup_{t\in[0,1]} |B_t^n - B_t^{n-1}| \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série de terme général $B^n - B^{n-1}$ converge uniformément, donc la suite B^n converge uniformément sur $[0,1]$. On note B sa limite, qui est continue comme limite uniforme de fonctions continues.

ii) Indépendance des accroissements + caractère gaussien.

Par récurrence, on montre (HR_n) :

$$(HR_n) \quad := \quad \text{Les accroissements de } B^{n-1} \text{ sur la partitions } 0, 2^{-n}, \dots, k2^{-n}, \dots \\ \text{sont indépendants et suivent tous la même loi } \mathcal{N}(0, 2^{-n}).$$

Pour $n = 0$, c'est évident. Pour $n = 1$: vérifions que la propriété est vraie.

$$B_0^0 = 0,\ B_{1/2}^0 = \frac{N_{-1} + N_{0,0}}{2},\ B_1^0 = N_{-1}$$

N_{-1} et $N_{0,0}$ sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Par conséquent $(\frac{N_{-1}+N_{0,0}}{2}, \frac{N_{-1}-N_{0,0}}{2})$ est un vecteur gaussien dont les marginales suivent la loi $\mathcal{N}(0, 1/2)$. De plus,

$$\mathbb{E}\Big[\frac{N_{-1} + N_{0,0}}{2}.\frac{N_{-1} - N_{0,0}}{2}\Big] = \frac{1}{4}.\mathbb{E}[N_{-1}^2 - N_{0,0}^2] = 0$$

Les accroissements sont bien indépendants.

Supposons (HR_n) vraie, étudions (HR_{n+1}).
Comme

$$B_t^n = B_t^{n-1} + \sum_{k=0}^{2^n-1} N_{k,n} f_{k,n}(t).$$

En utilisant (HR_n) et le fait que les v.a. $(N_{k,n})_k$ sont indépendantes de B^{n-1}, du fait que les fonction $f_{k,n}$ sont à supports disjoints, il suffit de vérifier que la propriété est vraie pour deux accroissements consécutifs dépendant de la même variable $N_{k,n}$, i.e.

$$X = B^n_{(2k+1)2^{-n-1}} - B^n_{2k2^{-n-1}} \quad \text{et} \quad Y = B^n_{(2k+2)2^{-n-1}} - B^n_{(2k+1)2^{-n-1}}$$

sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 2^{-n-1})$. Par construction, B^{n-1} est linéaire sur $[2k2^{-n-1}, (2k+2)2^{-n-1}]$, on remarque donc que $X = Z/2 + Z'$ et $Y = Z/2 - Z'$ où Z est l'accroissement de B^{n-1} : $Z = B^{n-1}_{(2k+2)2^{-n-1}} - B^{n-1}_{2k2^{-n-1}}$ et $Z' = 2^{-(n+2)/2} N_{k,n}$.
Par (HR_n), on sait que $Z \sim \mathcal{N}(0, 2^{-n})$, d'où $Z/2 \sim \mathcal{N}(0, 2^{-n-2})$. Par ailleurs $Z' \sim \mathcal{N}(0, 2^{-n-2})$ et est indépendante de Z. Donc $X \overset{Loi}{=} Y$de loi $\mathcal{N}(0, 2^{-n-1})$, et leur covariance vaut

$$\mathbb{E}[(Z/2 + Z')(Z/2 - Z')] = \mathbb{E}[Z^2/4 - Z'^2] = 2^{-n}/4 - 2^{-n-2} = 0.$$

D'où le résultat.

iii) Conclusion

On en déduit immédiatement par passage à la limite que le processus B a des accroissements indépendants sur les intervalles dyadiques et $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ pour tout t dyadique (car la convergence p.s. implique la convergence en loi). Comme B a des trajectoires continues, du fait que les dyadiques sont denses dans $[0, 1]$, par passage à la limite les résultats restent vrais sur $[0, 1]$. $\triangle$

4.3 Autre construction

Cette construction est basée sur les séries de Fourier. (cf, exo Revuz-Yor, chap 1). On considère des variables N_k, $N_{k'}$ indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors

$$\beta_t = tN_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2\pi k}(N_k \cos(2\pi kt - 1) + N'_k \sin(2\pi kt))$$

est un mouvement brownien. Pour cela on vérifie tout d'abord que les coefficients sont gaussiens et indépendants.

5 Régularité des trajectoires

Définition 5.1 Soit $X = (X_t, t \geq 0)$ un processus aléatoire. On dit que X admet une *version*, ou encore une *modification*, s'il existe un processus $\tilde{X} = (\tilde{X}_t, t \geq 0)$ tel que

$$\forall t \text{ fixé}, \ X_t = \tilde{X}_t \text{ p.s.}$$

On parle de *version continue*, ou *modification continue*, si la modification $\tilde{X}$ est p.s. continue.

Attention : on n'a pas en général $(X_t, t \geq 0) = (\tilde{X}_t, t \geq 0)$ p.s. ($[0, +\infty[$ n'est pas dénombrable !). Choisir une version (ou modification) d'un processus peut changer de façon importante le processus.

Exemple 5.2 Sur $(\Omega = [0,1], \mathcal{B}([0,1]), d\lambda)$ on considère le processus sur $[0,1]$

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq \omega \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors le processus $\tilde{X}_t = 0$, $\forall t \geq 0$ est une version de X. En effet $\forall t$ fixé, $X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega)$ sauf pour $\omega = t$. Par contre

$$\mathbb{P}(\forall t, X_t = \tilde{X}_t) = \mathbb{P}(\{\omega \in [0,1] : \forall t, X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega)\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in [0,1] : \forall t \in [0,1] \ \omega \neq t\}) = 0.$$

Remarque 5.3 Cependant dans le cas de processus continus on a : si X est un processus continu et $\tilde{X}$ une modification continue, alors p.s. $X = \tilde{X}$.

Le résultat de base sur l'existence de versions régulières de processus stochastique est le critère suivant :

Théorème 5.4 *Critère de Kolmogorov-Čentsov (1956)*
Soit $X = (X_t, t \in [0,1])$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (ou plus généralement un espace métrique complet) tel qu'il existe $c > 0$

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^p] \leq c|t-s|^{1+\varepsilon} \quad \text{pour } p > 1 \text{ et } \varepsilon > 0. \tag{5.1}$$

Alors il existe une version $\tilde{X}$ de X qui est p.s. localement höldérienne d'exposant α, pour tout $\alpha \in (0, \varepsilon/p)$.

Cas du mouvement brownien
Soit N une v.a. $\mathcal{N}(0,1)$ et $t, s \geq 0$. On a pour $p \geq 1$,

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^p] = \mathbb{E}[|\sqrt{|t-s|}N|^p] = |t-s|^{p/2}\mathbb{E}[|N|^p]$$

En notant $C = \mathbb{E}[|N|^p]$, le critère de kolmogorov s'applique pour $p > 2$, et donc les trajectoires browniennes sont *p.s.* localement hölderiennes d'exposant α, avec $\alpha < \frac{p/2-1}{p}$. On peut choisir p aussi grand que l'on veut, donc les trajectoires browniennes sont *p.s.* localement höldériennes d'exposant α, avec $\alpha \in (0, 1/2)$

Preuve du Critère de Kolmogorov-Čentsov.
La preuve est basée sur le lemme de Borel-Cantelli.
Pour simplifier, on suppose $c = 1$ (quitte à diviser X par la bonne constante). On fixe $\alpha < \varepsilon/p$.
Soit $D = \cup_n D_n$ l'ensemble des dyadiques, avec $D_n = \{k2^{-n}, k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. On a $D_n \subset D_{n+1}$ et D est dense dans $[0,1]$.

i) Pour t, s dyadiques.

• Soit $t, s \in D_n$ avec $t = (k+1)2^{-n}$ et $s = k2^{-n}$. D'après l'inégalité de Markov, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_{(k+1)2^{-n}} - X_{k2^{-n}}| > 2^{-n\alpha}) &\leq \frac{\mathbb{E}[|X_{(k+1)2^{-n}} - X_{k2^{-n}}|^p]}{2^{-np\alpha}} \\ &\leq 2^{-n(1+\varepsilon)+np\alpha}\end{aligned}$$

Comme $p\alpha < \varepsilon$,

$$\mathbb{P}(\exists k \in \{0, \ldots, 2^{-n} - 1\} : |X_{(k+1)2^{-n}} - X_{k2^{-n}}| > 2^{-n\alpha}) \leq 2^n 2^{-n(1+\varepsilon)+np\alpha} = 2^{-n\varepsilon+np\alpha}$$

est le terme général d'une série convergente. D'après Borel-Cantelli, avec proba 1 pour n assez grand, on a

$$|X_{(k+1)2^{-n}} - X_{k2^{-n}}| \leq 2^{-n\alpha} = |t-s|^\alpha \quad \forall k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1.$$

• Montrons maintenant que la restriction X à l'ensemble des dyadiques D est α-höldérienne. Soient $t, s \in D$, il existe alors $n \geq 0$ tel que $2^{-n-1} < |t-s| \leq 2^{-n}$. Par ailleurs, il existe $m \geq 1$ tel que $t, s \in D_{n+m}$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} t &= k2^{-n} + \varepsilon_0 2^{-n} + \varepsilon_1 2^{-n-1} + \ldots + \varepsilon_m 2^{-n-m} \\ s &= k2^{-n} + \varepsilon'_0 2^{-n} + \varepsilon'_1 2^{-n-1} + \ldots + \varepsilon'_m 2^{-n-m} \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_m, \varepsilon'_0, \ldots, \varepsilon'_m = 0$ ou 1. On note pour $i = 0, \ldots, m$

$$\begin{aligned} t_i &= k2^{-n} + \varepsilon_0 2^{-n} + \varepsilon_1 2^{-n-1} + \ldots + \varepsilon_i 2^{-n-i}, \\ s_i &= k2^{-n} + \varepsilon'_0 2^{-n} + \varepsilon'_1 2^{-n-1} + \ldots + \varepsilon'_i 2^{-n-i}. \end{aligned}$$

Alors $t = t_m$, $s = s_m$ et

$$\begin{aligned} |X_t - X_s| &\leq |X_{t_0} - X_{s_0}| + |X_{t_0} - X_{t_1}| + \ldots + |X_{t_{m-1}} - X_{t_m}| + \\ &\quad |X_{s_0} - X_{s_1}| + \ldots + |X_{s_{m-1}} - X_{s_m}| \\ &\leq (2^{-\alpha n} + 2^{-(n+1)\alpha} + \ldots + 2^{-(n+m)\alpha}) \times 2 \text{ p.s. pour } n \text{ assez grand.} \\ &\leq 2^{-\alpha n} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j\alpha} \leq \frac{2^\alpha}{1 - 2^{-\alpha}} |t-s|^\alpha \end{aligned}$$

Donc p.s. il existe $c > 0$ tel que $\forall t, s \in D$ $|X_t - X_s| \leq c|t-s|^\alpha$ pour $|t-s| \leq 2^{-n}$ avec n assez grand. Soit $\Omega' \subset \Omega$, $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ sur lequel cet événement se produit.

ii) Construction de la version Hölderienne.

On construit, pour $t \geq 0$, $\tilde{X}_t = \lim_{t' \in D, t' \to t} X_{t'}$ sur Ω'. Les trajectoires de $\tilde{X}$ sont localement α-hölderiennes.
Vérifions que $\tilde{X}$ est une version de X.
On a $\tilde{X}_t = X_t$ dès que $t \in D$. Par ailleurs, d'après (5.1), $X_{t'}$ converge vers X_t dans L^p quand $t' \in D, t' \to t$. Donc $\forall t > 0$ $\tilde{X}_t = X_t$ p.s.. $\tilde{X}$ est bien une version de X. △

On va voir maintenant que le résultat de régularité höldérienne d'ordre $\alpha < 1/2$ pour les trajectoires brownienne est optimal.

Théorème 5.5 *(Dvoretsky, 1963)*
Il existe une constant $C > 0$ telle que

$$\mathbb{P}(\exists t > 0 : \limsup_{s \to t^+} \frac{|B_s - B_t|}{\sqrt{s-t}} < C) = 0$$

Par conséquent, p.s. $\forall t \in [0, 1]$, $\limsup_{s \to t^+} \frac{|B_s - B_t|}{\sqrt{s-t}} \geq C$. En particulier, les trajectoires browniennes sont nulle part dérivables avec proba 1.

Preuve. (On choisira la constante C à la fin)
Il suffit de vérifier que pour chaque $\Delta > 0$, on a

$$\mathbb{P}(\exists t > 0 : |B_{t+h} - B_t| < C\sqrt{h} \ \ \forall h \in [0, \Delta]) = 0$$

On remarque que pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\exists t > 0 : |B_{t+h} - B_t| < C\sqrt{h} \ \ \forall h \in [0, \Delta]) &\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\exists t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] : |B_{t+h} - B_t| < C\sqrt{h} \ \ \forall h \in [0, \Delta]) \\
&\leq n\, \mathbb{P}(\exists t \in [0, \frac{1}{n}] : |B_{t+h} - B_t| < C\sqrt{h} \ \ \forall h \in [0, \Delta]) \\
&\quad \text{par stationnarité des accroissements.}
\end{aligned}$$

On connait la loi de $B_{t+h} - B_t$, mais on ne peut pas calculer directement cette probabilité à cause des termes $\exists t \in [0, \frac{1}{n}]$ et $\forall h \in [0, \Delta]$ (intervalle non dénombrable !).
Soit n tel que $1/n < \Delta$, et $(h_j)_{j=0,\dots,N}$ une famille (que l'on déterminera plus tard) croissante, telle que $h_j \in [1/n, \Delta]$ pour tout j. On remarque que si $\exists t \in [0, \frac{1}{n}] : |B_{t+h} - B_t| < C\sqrt{h} \ \ \forall h \in [0, \Delta]$, alors pour tout $j = 0, \dots, N$, en prenant $h = h_j - t$ (on a bien $h \in [0, \Delta]$, car $h \leq h_j$), on a

$$|B_{h_j} - B_t| < C\sqrt{h_j}.$$

Et donc pour tout $j = 1, \dots, N$,

$$|B_{h_j} - B_{h_{j-1}}| < 2C\sqrt{h_j},$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\exists t \in [0, \frac{1}{n}] : |B_{t+h} - B_t| < C\sqrt{h} \ \ \forall h \in [0, \Delta]) \\
&\quad \leq \mathbb{P}(\forall j \in \{1, \dots, N\} : |B_{h_j} - B_{h_{j-1}}| < 2C\sqrt{h_j}) \\
&\quad \leq \prod_{j=1}^{N} \mathbb{P}(|B_{h_j} - B_{h_{j-1}}| < 2C\sqrt{h_j}) \text{ par indépendance des accroissements} \\
&\quad \leq \prod_{j=1}^{N} \mathbb{P}(|Z| < 2C\frac{\sqrt{h_j}}{\sqrt{h_j - h_{j-1}}}) \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1)
\end{aligned}$$

On souhaite choisir C (indépendante de n et j) et trouver une famille $(h_j)_{j=1,\dots,N}$ tels que $n \prod_{j=1}^{N} \mathbb{P}(|Z| < 2C\frac{\sqrt{h_j}}{\sqrt{h_j - h_{j-1}}})$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$.
En prennant $h_j = 2^j/n$, avec $N = [\ln(n\Delta)/\ln(2)]$, la famille satisfait bien les hypothèses voulues et

$$\mathbb{P}(|Z| < 2C\frac{\sqrt{h_j}}{\sqrt{h_j - h_{j-1}}}) = \mathbb{P}(|Z| < 2C\sqrt{2})$$

En choisissant $C > 0$ tel que $\mathbb{P}(|Z| < 2C\sqrt{2}) \leq 1/4$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\exists t > 0 : |B_{t+h} - B_t| < C\sqrt{h} \ \ \forall h \in [0, \Delta]) &\leq n\left(\frac{1}{4}\right)^N \leq n\left(\frac{1}{4}\right)^{\ln(n\Delta)/\ln(2)} \\
&\leq \frac{1}{n\Delta^2}.
\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient le résultat. $\triangle$

6 La mesure de Wiener

On note $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1], I\!R)$ ou $\mathcal{C}([0,\infty[, I\!R)$ l'espace des fonctions continues à valeurs dans $I\!R$.
$\mathcal{C}$ muni de la norme uniforme est un espace de Banach (dans le cas, de fonctions définie sur $[0,+\infty)$ on utilise la norme $d(u,v) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \min(||u-v||_n, 1)$ où $||u-v||_n = \sup\{|u(x)-v(x)| : x \in [0,n]\}$).
On munit $\mathcal{C}$ de sa tribu borélienne. C'est la tribu engendrée par les ouverts élémentaires : $n \geq 1$, $0 < t_1 < \ldots < t_n$, $A_1, \ldots, A_n$ des ouverts de $I\!R$

$$O = \{\omega \in \mathcal{C} : \omega(t_1) \in A_1, \ldots \omega(t_1) \in A_n\}. \tag{6.2}$$

Définition 6.1 Soit B un mouvement brownien. B est à valeurs dans l'espace $\mathcal{C}$. La loi de cette v.a. sur $\mathcal{C}$ est appelée *mesure de Wiener*.
L'espace $\mathcal{C}$ muni de la mesure de Wiener est appelé espace de Wiener.

Si on considère deux variables aléatoires X et Y, on sait que la loi de chacune des variables ne suffit pas pour connaître la loi du couple. De même, pour le mouvement brownien, on peut se demander si la définition du brownien caractérise de façon unique la mesure de Wiener.

Propriété 6.2 La mesure de Wiener est unique : si $\mathbb{W}$ et $\mathbb{Q}$ sont deux probabilités sur $\mathcal{C}$ chacune issue d'un mouvement brownien, alors $\mathbb{W} = \mathbb{Q}$.

Preuve.
Rappel : *Théorème des classes monotones*
Soit $\mathcal{L}$ une famille de partie de l'espace E un λ-système, i.e.

- $E \in \mathcal{S}$,
- si $A, B \in \mathcal{S}$ avec A inclus dans B alors $A^c \in \mathcal{S}$,
- si stable par union dénombrable croissante.

Soit $\mathcal{P}$ un π-système, i.e. stable par intersection finie. :
Si $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$, alors $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.

On remarque que $\mathcal{P}$ l'ensemble des ouverts élémentaires est un π-système.
Soit $\mathcal{L} = \{\Lambda \in \mathcal{B} : \mathbb{W}(\Lambda) = \mathbb{Q}(\Lambda)\}$, où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de $\mathcal{C}([0,1], I\!R)$. $\mathcal{L}$ est un λ-système.
Soit O est un ouvert élémentaire, montrons que $O \in \mathcal{L}$. En effet si $\mathbb{W}$ est issu du mvt brownien B et $\mathbb{Q}$ est issu du mvt brownien $\tilde{B}$ et $O = \{\omega \in \mathcal{C} : \omega(t_1) \in A_1, \ldots \omega(t_1) \in A_n\}$ un ouvert élémentaire, on a

$$\mathbb{W}(O) = \mathbb{P}(B_{t_1} \in A_1, \ldots, B_{t_n} \in A_n) = \mathbb{P}(\tilde{B}_{t_1} \in A_1, \ldots, \tilde{B}_{t_n} \in A_n) = \mathbb{Q}(O).$$

Alors $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B} \subset \mathcal{L}$. Donc $\mathbb{W} = \mathbb{Q}$. $\triangle$

Remarque 6.3 On a en fait démontré que la loi d'un processus est entièrement déterminée par ses lois finis dimensionnelles.

Remarque 6.4 Comment définir le mouvement brownien en dimension plus grande ?
Un mouvement brownien $B = (B^1, \ldots, B^d)$ à valeurs dans $I\!R^d$ est un processus tel que les B^i sont des mouvements browniens indépendants, i.e. pour tous ouverts O_i de $\mathcal{C}$ $\mathbb{P}(B^1 \in O_1 \cap \ldots \cap B^d \in O_d) = \mathbb{P}(B^1 \in O_1) \ldots \mathbb{P}(B^d \in O_d)$.

Bibliographie

[1] Jean-François Le Gall. Introduction au mouvement brownien. *Gazette des Mathématiciens*, 40, 1989.

[2] Dominique Foata et Aimé Fuchs. *Processus stochastiques*. Dunod, 1998.

[3] Daniel Revuz et Marc Yor. *Continuous martingales and brownian motion*. Springer, 1991.

[4] Claude Dellacherie et Paul-André Meyer. *Probabilités et potentiels*. Hermann, 1975.

[5] Ioannis Karatzas et Steven E. Shreve. Springer, 1991.

[6] Hui-Hsiung Kuo. *Introduction to stochastic integration*. Springer, 2006.

[7] Edward Nelson. *Dynamical theories of Brownian motion*. http ://www.math.princeton.edu /∼nelson/books/bmotion.pdf.

[8] Philip Protter. *Stochastic integration and differential equations*. Springer, 1995.