Université Rennes 1. Lundi 13 février 2006
IUP Miage 1ère année.

Partiel de Probabilités et Statistiques (2 heures)

Les calculatrices sont autorisées.

Exercice 1

Un joueur dispose d'un dé noir et d'un dé blanc qu'il jette simultanément. On note X le numéro du dé noir et Y celui du dé blanc. On supppose que les variables sont indépendantes et que les dés ne sont pas truqués.

Le joueur gagne 1 euro si chacun des deux numéros obtenus est ≥ 4,

perd 1 euro si chacun des deux numéros obtenus est ≤ 3,

sinon son gain est nul.

On note G le gain du joueur.

a) Déterminer la loi de G.

b) Calculer l'espérance et la variance de G.

c) Sachant que le joueur a eu un gain nul, quelle est la probabilité que le numéro du dé blanc soit égal à 2 ?

Exercice 2

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4
0	0	0	1/8	0	0
1	0	1/4	0	1/12	0
2	1/8	0	1/6	0	1/24
3	0	1/12	0	1/12	0
4	0	0	1/24	0	0

a) Déterminer les lois marginales de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

b) On pose $S = X + Y$ et $D = X - Y$. Donner le tableau de la loi du couple (S, D). S et D sont-elles indépendantes ?

Exercice 3

On considère une variable aléatoire X de densité : $f(x) = ce^{-2|x|} \quad x \in \mathbb{R}$.

a) Calculer la valeur de c pour que f soit bien une densité de probabilité.

b) Montrer que la fonction génératrice de X est définie pour $t \in]-2, 2[$ par

$$g(t) = E[e^{tX}] = \frac{4c}{4 - t^2}$$

c) En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 4

a) Question préliminaire: Soit X une variable aléatoire, vérifier que

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a).$$

⇒ Tourner la page s.v.p.

b) Un viticulteur possède un grand nombre de pieds de vigne, chacun pied a la probabilité 0.4 d'être atteints d'une maladie. On observe 450 pieds pris au hasard sur toute la vigne et on note X le nombre de pieds malades.

b1) Quelle est la loi de X ?

b2) En utilisant une approximation de la loi de X (justifier votre approximation), déterminer la probabilité des événements suivants :

$$\{180 \leq X \leq 195\} \quad \text{et} \quad \{165 \leq X \leq 180\}.$$

b3) Déterminer la valeur de t telle que $P(180 - t \leq X \leq 180 + t) \simeq 0.95$.