# 2 Séries numériques

## 2.1 Définitions et notations.

**Définition 1** *Soit* $(u_n)$ *une suite numérique. La suite* $(S_N)$ *de terme général*

$$S_N = u_0 + u_1 + \ldots + u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

*est appelée* **série** *de terme général* $u_n$*.*

$S_N$ *est la* **somme partielle d'ordre** $N$*. On notera* $\sum u_n$ *la série de terme général* $u_n$*.*

**Définitions 1** *Soit* $\sum u_n$ *une série numérique. Elle est dite convergente si la suite des sommes partielles* $(S_N)$ *converge vers un nombre* $S$*.*

*Dans ce cas* $S$ *est appelé* **somme** *de la série et est noté* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$*,*

*et* $R_N = S - S_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ *est le* **reste d'ordre** $N$ *de la série.*

Une série non convergente est dite divergente.

**Exemples 1**

- *Série géométrique de raison plus petite que 1 :* $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$*.*
  *Les sommes partielles valent*

  $$S_N =$$

  *C'est une série convergente et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \qquad .$

- *Série géométrique de raison plus grande que 1 :* $u_n = 2^n$*.*
  *Les sommes partielles valent*

  $$S_N =$$

  *C'est une série divergente.*

## 2.2 Premières propriétés

**Proposition 1** *Si la série* $\sum u_n$ *converge alors* $u_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

*Preuve.* –

$\square$

**Remarque 1** *Cette proposition n'est pas utile pour prouver qu'une série converge mais seulement pour prouver qu'une série diverge.*

**Exemples 2** *La série géométrique de raison* $q$ : $\sum q^n$ *diverge lorsque* $|q| \geq 1$.

**Théorème 1**

– *Si* $\sum u_k$ *et* $\sum v_k$ *vérifient* $u_k = v_k$ *lorsque* $k > p$ *alors*

$$\sum u_k \text{ converge si et seulement si } \sum v_k \text{ converge}$$

– *S'il existe* $q \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_{k+q} = v_k$ *pour tout* $k$ *alors*

$$\sum u_k \text{ converge si et seulement si } \sum v_k \text{ converge}$$

## 2.3 La série harmonique : $\sum \frac{1}{k}$.

Le terme général tend vers 0 mais la série diverge.

Les sommes partielles sont $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. Considérons la suite extraite : $T_N = S_{2^N}$. On a alors

$$T_{N+1} - T_N \quad =$$

La suite extraite $(T_N)$ diverge, la suite $(S_N)$ est donc aussi divergente :

$$\boxed{\text{la série harmonique diverge.}}$$

Voir aussi l'exercice 6 du TD 1

Interprétation physique sur `http ://www.etudes.ru (/ru/mov/mov006/index.php)`

## 2.4 Séries géométriques

La série géomérique de premier terme $a$ et de raison $q$ est

$$\sum aq^n.$$

**Théorème 2**

- *Si* $|q| < 1$ *la série* $\sum aq^n$ *converge vers* $\frac{a}{1-q}$.
- *Si* $|q| \geq 1$ *et* $a \neq 0$ *la série* $\sum aq^n$ *est divergente.*

*Preuve.* – - c.f. le cours sur les suites - □

**Exemple 1** *Montrons que* $0,33333\ldots = \dfrac{1}{3}$.

## 2.5 Séries téléscopiques

**Exemple 2** *Les sommes partielles de la série* $\sum(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ *se calculent facilement.*

$$\sum_{n=1}^{N}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) =$$

*Calculons la somme de* $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

*Fixons* $p \in \mathbb{N}_{>0}$. *Que pouvez-vous dire de la série* $\sum \frac{1}{n(n+p)}$ *?*

## 2.6 Opérations sur les séries

**Proposition 2** *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries,* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\mu \in \mathbb{R}$. *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

*Preuve.* – ... □

**Remarques 1**

*1 - Si* $\sum u_n$ *converge et* $\sum v_n$ *diverge alors* $\sum u_n + v_n$ *diverge.*

*2 - Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *divergent alors on ne sait rien sur* $\sum u_n + v_n$.

*Considérez* $u_n = 1/n$ *et* $v_n = -1/n$.

*3 - La série produit* $\sum u_n v_n$ *n'a pas pour somme* $(\sum u_n)(\sum v_n)$.

*Considérez* $u_n = (1/2)^n$ *et* $v_n = (1/3)^n$.

## 2.7 Séries à termes positifs

Ce sont les séries $\sum u_n$ avec $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Proposition 3** *Une série à terme positifs* $\sum u_n$ *est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.*

*Preuve.* –

□

### 2.7.1 Théorèmes de comparaison

**Théorème 3** *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs avec* $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

- *Si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge.*
- *Si* $\sum u_n$ *diverge alors* $\sum v_n$ *diverge.*

*Preuve.* – ... $\square$

**Exemple 3** *Montrons que la série* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *converge.*

### 2.7.2 Théorèmes de comparaison

**Théorème 4** *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs avec* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

*La série* $\sum u_n$ *converge si et seulement si* $\sum v_n$ *converge.*

**Rappel** $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ si $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

*Preuve.* – ... □

**Exemple 4** *Montrons que la série* $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$ *diverge.*

### 2.7.3 Critère de d'Alembert

**Théorème 5** *Soit* $\sum u_n$ *une série à terme positifs telle que* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

- *Si* $\ell < 1$*, la série converge.*
- *Si* $\ell > 1$*, la série diverge.*

*Preuve.* – ... $\square$

**Exemple 5** *Montrons que la série* $\sum \dfrac{1}{n!}$ *converge.*

## 2.8 Critère de Cauchy

**Théorème 6** *Soit* $\sum u_n$ *une série à terme positifs telle que* $\sqrt[n]{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

- *Si* $\ell < 1$, *la série converge.*
- *Si* $\ell > 1$, *la série diverge.*

*Preuve.* – … $\square$

**Exemple 6** *Montrons que la série* $\sum \frac{1}{n^n}$ *converge.*

## 2.9 Comparaison avec une intégrale

**Théorème 7** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction continue et décroissante.*

*La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.*

*Preuve.* –

$\square$

**Exemple 7 (Séries de Riemann)** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont appelées séries de Riemann.*

*Montrons qu'une série de Riemann converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.*

## 2.10 Séries à termes réels

**Définition 2** *Une série* $\sum u_n$ *est dite* **absolument convergente** *si la série* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

**Théorème 8** *Si* $\sum u_n$ *est une série absolument convergente alors elle converge.*

*Preuve.* – ... $\square$

**Exemple 8** *Montrons que la série* $\sum \dfrac{\sin n}{n^2}$ *converge.*

## 2.11 Séries alternée

**Définition 3** *Une série* $\sum u_n$ *est dite* **alternée** *si ces termes sont alternativement positifs et négatifs.*

**Théorème 9** *Soit* $\sum u_n$ *une série alternée. Si* $|u_n|$ *décroit et tend vers* $0$ *alors la série* $\sum u_n$ *est convergente. Plus précisement,*

$$\big|R_N\big| = \Big|\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n\Big| \le |u_{N+1}|.$$

*Preuve.* – ... $\square$

**Exemple 9** *Montrons que la série* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *converge mais ne converge pas absolument.*

## 2.12 Séries à termes complexes

**Proposition 4** *Une série à termes complexes* $\sum u_n$ *converge si et seulement si les séries à termes réels* $\sum \Re e(u_n)$ *et* $\sum \Im m(u_n)$ *convergent.*

**Définition 4** *Une série à termes complexes* $\sum u_n$ *est dite* **absolument convergente** *si la série à termes positifs* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

**Théorème 10** *Si* $\sum u_n$ *est une série à termes complexes absolument convergente alors elle converge.*

*Preuve.* – … □

## 2.13 La série $\sum z^k$.

**Proposition 5**

- *Si* $|z| \geq 1$ *la série* $\sum z^k$ *est divergente.*
- *Si* $|z| < 1$ *la série* $\sum z^k$ *converge absolument et sa somme vaut*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k =$$

**Exemple 10** *Calculons les sommes des deux séries* $\sum a_k$ *et* $\sum b_k$ *avec*

$$a_k = \frac{\cos k\theta}{2^k} \text{ et } b_k = \frac{\sin k\theta}{2^k}.$$