# MATRICES

Les matrices sont des tableaux de nombres. La résolution d'un certain nombre de problèmes d'algèbre linéaire se ramène à des manipulations sur les matrices. Ceci est vrai en particulier pour la résolution des systèmes linéaires.

**Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps. On peut penser à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.**

## 1. Définition

### 1.1. Définition.

**Définition 1.**

— Une ***matrice*** $A$ est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}$.
— Elle est dite de ***taille*** $n \times p$ si le tableau possède $n$ lignes et $p$ colonnes.
— Les nombres du tableau sont appelés les ***coefficients*** de $A$.
— Le coefficient situé à la $i$-ème ligne et à la $j$-ème colonne est noté $a_{i,j}$.

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \big(a_{i,j}\big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \quad \text{ou} \quad \big(a_{i,j}\big).$$

**Exemple 1.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

est une matrice $2 \times 3$ avec, par exemple, $a_{1,1} = 1$ et $a_{2,3} = 7$.

Encore quelques définitions :

**Définition 2.**

— Deux matrices sont ***égales*** lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.

— L'ensemble des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Les éléments de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ sont appelés ***matrices réelles***.

Par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2. **Matrices particulières.**

— Si $n = p$ (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice est dite ***matrice carrée***. On note $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ forment la ***diagonale principale*** de la matrice.

— Une matrice qui n'a qu'une seule ligne ($n = 1$) est appelée ***matrice ligne*** ou ***vecteur ligne***. On la note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \end{pmatrix}.$$

— De même, une matrice qui n'a qu'une seule colonne ($p = 1$) est appelée ***matrice colonne*** ou ***vecteur colonne***. On la note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}.$$

— La matrice (de taille $n \times p$) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la ***matrice nulle*** et est notée $0_{n,p}$ ou plus simplement $0$.

1.3. **Addition de matrices.**

**Définition 3** (Somme de deux matrices)**.** Soient $A$ et $B$ deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur ***somme*** $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

En d'autres termes, on somme coefficients par coefficients. Remarque : on note indifféremment $a_{ij}$ où $a_{i,j}$ pour les coefficients de la matrice $A$.

**Exemple 2.**

$$\text{Si} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{alors} \qquad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Par contre si} \qquad B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \text{alors} \quad A + B' \quad \text{n'est pas définie.}$$

**Définition 4** (Produit d'une matrice par un scalaire)**.** Le produit d'une matrice $A = \left(a_{ij}\right)$ de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est la matrice $\left(\alpha a_{ij}\right)$ formée en multipliant chaque coefficient de $A$ par $\alpha$. Elle est notée $\alpha \cdot A$ (ou simplement $\alpha A$).

**Exemple 3.**

$$\text{Si} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \alpha = 2 \qquad \text{alors} \qquad \alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $(-1)A$ est l'***opposée*** de $A$ et est notée $-A$. La ***différence*** $A - B$ est définie par $A + (-B)$.

**Exemple 4.**

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Remarque.** L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{K})$, muni de l'addition (et de la différence) des matrices est appelé le *groupe* des matrices.

L'addition et la multiplication par un scalaire se comportent sans surprises :

**Proposition 1.** Soient $A$, $B$ et $C$ trois matrices appartenant à $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ deux scalaires.

(1) $A + B = B + A$ : la somme est commutative,

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ : la somme est associative,

(3) $A + 0 = A$ : la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,

(4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,

(5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

*Démonstration.* Prouvons par exemple le quatrième point. Le terme général de $(\alpha+\beta)A$ est égal à $(\alpha+\beta)a_{ij}$. D'après les règles de calcul dans $\mathbb{K}$, $(\alpha+\beta)a_{ij}$ est égal à $\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}$ qui est le terme général de la matrice $\alpha A + \beta A$.

$\square$

**Mini-exercice.**

(1) Soient $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 0 & 3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$, $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer toutes les sommes possibles de deux de ces matrices.

(2) Montrer que si $A + B = A$, alors $B$ est la matrice nulle.

(3) Que vaut $0 \cdot A$ ? et $1 \cdot A$ ? Justifier l'affirmation : $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$. Idem avec $nA = A + A + \cdots + A$ ($n$ occurrences de $A$).

## 2. Multiplication de matrices

2.1. **Définition du produit.** Le produit $AB$ de deux matrices $A$ et $B$ est défini si et seulement si le nombre de colonnes de $A$ est égal au nombre de lignes de $B$.

**Définition 5** (Produit de deux matrices)**.** Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients $c_{ij}$ sont définis par :

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}}$$

On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à savoir :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Il est commode de disposer les calculs de la façon suivante.

$$\begin{array}{rcl} & \begin{pmatrix} & & & \times & & \\ & & & \times & & \\ & & & \times & & \\ & & & \times & & \end{pmatrix} & \leftarrow B \\ A \rightarrow \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ \times & \times & \times & \times \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & & | & & \\ & & & | & & \\ - & - & - & c_{ij} & & \\ & & & & & \end{pmatrix} & \leftarrow AB \end{array}$$

Avec cette disposition, on considère :

— la ligne de la matrice $A$ située à gauche du coefficient que l'on veut calculer,

— la colonne de la matrice $B$ située au-dessus du coefficient que l'on veut calculer.

On calcule le produit du premier coefficient de la ligne par le premier coefficient de la colonne ($a_{i1} \times b_{1j}$), que l'on ajoute au produit du deuxième coefficient de la ligne par le deuxième coefficient de la colonne ($a_{i2} \times b_{2j}$), que l'on ajoute au produit du troisième…

**Exemple 5.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On dispose d'abord le produit correctement (à gauche) : la matrice obtenue est de taille $2 \times 2$. Puis on calcule chacun des coefficients, en commençant par le premier coefficient

$$c_{11} = 1 \times 1 \ + \ 2 \times (-1) \ + \ 3 \times 1 = 2$$

(au milieu), puis les autres (à droite).

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 \\ \color{red}{-1} & 1 \\ \color{red}{1} & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3} \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \color{blue}{2} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Un exemple intéressant est le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne :

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Alors $u \times v$ est une matrice de taille $1 \times 1$ dont l'unique coefficient est $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$. Ce nombre s'appelle le ***produit scalaire*** des vecteurs $u$ et $v$.

**Remarque.** Calculer le coefficient $c_{ij}$ dans le produit $A \times B$ revient donc à calculer le produit scalaire des vecteurs formés par la $i$-ème ligne de $A$ et la $j$-ème colonne de $B$.

**Pièges à éviter.**

**Premier piège. Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.**

En effet, il se peut que $AB$ soit défini mais pas $BA$, ou que $AB$ et $BA$ soient tous deux définis mais pas de la même taille. Mais même dans le cas où $AB$ et $BA$ sont définis et de la même taille, on a en général $AB \neq BA$.

**Exemple 6.**

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{mais} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Deuxième piège.** $AB = 0$ **n'implique pas** $A = 0$ **ou** $B = 0$**.**

Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

**Exemple 7.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Troisième piège. $AB = AC$ n'implique pas $B = C$.** On peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$.

**Exemple 8.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

2.2. **Propriétés du produit de matrices.** Malgré les difficultés soulevées au-dessus, le produit vérifie les propriétés suivantes :

**Proposition 2.**

(1) Soient $A$ dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B$ dans $M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C$ dans $M_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors $A(BC) = (AB)C$ : associativité du produit,

(2) Soient $A$ dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B$ et $C$ dans $M_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors $A(B+C) = AB+AC$ et $(B+C)A = BA+CA$ : distributivité du produit par rapport à la somme,

(3) Soit $A$ dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors pour tout entier $q$ on a $A \cdot 0_{p,q} = 0_{n,q}$ et $0_{q,n} \cdot A = 0_{q,p}$.

On va démontrer l'associativité dans la Proposition 2.

*Démonstration.* Posons $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij}) \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C = (c_{ij}) \in M_{q,r}(\mathbb{K})$. Prouvons que $A(BC) = (AB)C$ en montrant que les matrices $A(BC)$ et $(AB)C$ ont les mêmes coefficients.

Le terme d'indice $(i,k)$ de la matrice $AB$ est $x_{ik} = \sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} b_{\ell k}$. Le terme d'indice $(i,j)$ de la matrice $(AB)C$ est donc

$$\sum_{k=1}^{q} x_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{q} \left( \sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} b_{\ell k} \right) c_{kj}.$$

Le terme d'indice $(\ell,j)$ de la matrice $BC$ est $y_{\ell j} = \sum_{k=1}^{q} b_{\ell k} c_{kj}$. Le terme d'indice $(i,j)$ de la matrice $A(BC)$ est donc

$$\sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} \left( \sum_{k=1}^{q} b_{\ell k} c_{kj} \right).$$

Comme dans $\mathbb{K}$ la multiplication est distributive et associative, les coefficients de $(AB)C$ et $A(BC)$ coïncident.
Les autres démonstrations se font comme celle de l'associativité.

$\square$

2.3. **La matrice identité.** La matrice carrée suivante s'appelle la ***matrice identité*** :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0. Elle se note $I_n$ ou simplement $I$.

**Remarque.** La matrice unité d'ordre $n$ est telle que tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1, les autres étant tous nuls.

On peut formaliser cela en introduisant le symbole de Kronecker. Si $i$ et $j$ sont deux entiers, on appelle ***symbole de Kronecker***, et on note $\delta_{i,j}$, le réel qui vaut 0 si $i$ est différent de $j$, et 1 si $i$ est égal à $j$. Donc

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

Alors le terme général de la matrice identité $I_n$ est $\delta_{i,j}$ avec $i$ et $j$ entiers, compris entre 1 et $n$.

Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication. En d'autres termes :

**Proposition 3.** Si $A$ est une matrice $n \times p$, alors

$$I_n \cdot A = A \qquad \text{et} \qquad A \cdot I_p = A.$$

*Démonstration.* Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ de terme général $a_{ij}$.

La matrice produit $AI_p$

— appartient à $M_{n,p}(\mathbb{K})$,

— son terme général $c_{ij}$ est donné par la formule $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\delta_{kj}$.

Si $k \neq j$ alors $\delta_{kj} = 0$, et si $k = j$ alors $\delta_{kj} = 1$. Il reste donc

$$c_{ij} = a_{ij}\delta_{jj} = a_{ij}1 = a_{ij}.$$

Donc les matrices $AI_p$ et $A$ ont le même terme général et sont donc égales.

L'égalité $I_nA = A$ se démontre de la même façon.

$\square$

2.4. **Puissance d'une matrice carrée.** Dans l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, la multiplication des matrices est une opération interne : si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ alors $AB \in M_n(\mathbb{K})$.

**Remarque.** Le groupe des matrices $M_n(\mathbb{K})$, muni du produit des matrices, est appelé l'*anneau* des matrices de taille $n$.

En particulier, on peut multiplier une matrice carrée par elle-même : on note $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$.

On peut ainsi définir les puissances successives d'une matrice :

**Définition 6.** Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit les puissances successives de $A$ par $A^0 = I_n$ et $A^{p+1} = A^p \times A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Autrement dit, $A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$.

**Exemple 9.** On cherche à calculer $A^p$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule $A^2$, $A^3$ et $A^4$ et on obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

L'observation de ces premières puissances permet de penser que la formule est : $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$ pour $p \geqslant 1$. Démontrons ce résultat par récurrence.

Pour cela, définissons notre hypothèse de récurrence $H_p$ à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ comme étant

$$H_p : \quad A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}.$$

Initialisation : le résultat est vrai pour $p = 1$ (on retrouve $A$).
Hérédité : on suppose $H_p$ pour un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et on démontre $H_{p+1}$. Or, d'après la définition,

$$A^{p+1} = A^p \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{p+1} - 1 \\ 0 & (-1)^{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{p+1} \end{pmatrix},$$

d'où $H_{p+1}$. Donc la propriété est démontrée par récurrence.

2.5. **Formule du binôme.** Comme la multiplication n'est pas commutative, les identités binomiales usuelles sont fausses ! ! !
En particulier, $(A+B)^2$ ne vaut en général pas $A^2+2AB+B^2$, mais on sait seulement que

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2.$$

**Proposition 4** (Calcul de $(A+B)^p$ lorsque $AB = BA$)**.** Soient $A$ et $B$ deux éléments de $M_n(\mathbb{K})$ qui ***commutent***, c'est-à-dire tels que $AB = BA$. Alors, pour tout entier $p \geqslant 0$, on a la formule

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k$$

où $\binom{p}{k}$ désigne le coefficient du binôme.

**Remarque.** La démonstration est similaire à celle de la formule du binôme pour $(a+b)^p$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

**Exemple 10.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que l'on décompose en $A = I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notons que $N^2 = 0$. De plus $I$ et $N$ commutent, donc pour $p \in \mathbb{N}$ on obtient

$$A^p = (I + N)^p = I^p + pI^{p-1}N$$

par la formule du binôme. On en déduit $A^p = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exemple 11.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice $N$ est nilpotente (c'est-à-dire il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$) comme le montrent les calculs suivants :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N^4 = 0.$$

Comme on a $A = I + N$ et les matrices $N$ et $I$ commutent (la matrice identité commute avec toutes les matrices), on peut appliquer la formule du binôme de Newton. On utilise que $I^k = I$ pour tout $k$ et surtout que $N^k = 0$ si $k \geqslant 4$. On obtient

$$A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k I^{p-k} = \sum_{k=0}^{3} \binom{p}{k} N^k = I + pN + \tfrac{p(p-1)}{2!} N^2 + \tfrac{p(p-1)(p-2)}{3!} N^3.$$

D'où

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & p^2 & p(p^2 - p + 1) \\ 0 & 1 & 2p & p(3p-2) \\ 0 & 0 & 1 & 3p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Mini-exercice.**

(1) Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$. Quels produits sont possibles ? Les calculer !

(2) Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2$, $B^2$, $AB$ et $BA$.

(3) Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^p$ et $B^p$ pour tout $p \geqslant 0$. Montrer que $AB = BA$. Calculer $(A+B)^p$.

## 3. Inverse d'une matrice carrée

— Dans $\mathbb{N}$, un entier non nul n'admet pas d'inverse pour l'addition. Dans $\mathbb{Z}$, oui.

— Dans $\mathbb{Z}$, un entier différent de 1 n'admet pas d'inverse pour la multiplication. Dans $\mathbb{Q}$, oui.

Pour les matrices, la situation est plus délicate. Une matrice n'admet pas en général d'inverse pour la multiplication, même en considérant les matrices dans un ensemble plus grand.

## 3.1. **Définition.**

**Définition 7** (Matrice inverse)**.** Soit $A$ une matrice carrée de taille $n \times n$. S'il existe une matrice carrée $B$ de taille $n \times n$ telle que

$$AB = I \qquad \text{et} \qquad BA = I,$$

on dit que $A$ est ***inversible***. On appelle $B$ l'***inverse de*** $A$ et on la note $A^{-1}$.

**Remarque.** On verra plus tard qu'il suffit en fait de vérifier une seule des conditions $AB = I$ ou bien $BA = I$.

- Plus généralement, quand $A$ est inversible, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :
$$A^{-p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{p \text{ facteurs}}.$$
- L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$ (et est appelé groupe linéaire d'ordre $n$).

### 3.2. **Exemples.**

**Exemple 12.** Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. La matrice $A$ est inversible s'il existe une matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, telle que $AB = I$ et $BA = I$.

Or $AB = I$ équivaut à :

$$AB = I \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} a+2c = 1 \\ b+2d = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases}$$

Sa résolution est immédiate : $a = 1$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = 0$, $d = \frac{1}{3}$.

Il n'y a donc qu'une seule matrice possible : $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right)$.

On vérifie qu'on a aussi l'égalité $BA = I$. La matrice $A$ est donc inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

**Exemple 13.** La matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ n'est pas inversible. En effet, soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque. Alors le produit

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 5b & 0 \\ 3c + 5d & 0 \end{pmatrix}$$

ne peut jamais être égal à la matrice identité.

**Exemple 14.**

- La matrice identité $I_n$ est inversible, et son inverse est elle-même : $I_n I_n = I_n$.
- La matrice nulle $0_n$ de taille $n \times n$ n'est pas inversible.

  En effet on sait que, pour toute matrice $B$ de $M_n(\mathbb{K})$, on a $B0_n = 0_n$, qui ne peut jamais être la matrice identité.

### 3.3. **Propriétés.**

#### 3.3.1. *Unicité de l'inverse.*

**Proposition 5.** Si $A$ est inversible, alors son inverse est unique.

*Démonstration.* On va supposer l'existence de deux matrices $B_1$ et $B_2$ satisfaisant aux conditions imposées et démontrer que $B_1 = B_2$.

Soient donc $B_1$ telle que

$$AB_1 = B_1A = I_n$$

et $B_2$ telle que

$$AB_2 = B_2A = I_n.$$

Calculons $B_2(AB_1)$ de deux manières différentes.

— D'une part, comme $AB_1 = I_n$, on a $B_2(AB_1) = B_2$.

— D'autre part, comme le produit des matrices est associatif, on a

$$B_2(AB_1) = (B_2A)B_1 = I_nB_1 = B_1.$$

Donc $B_1 = B_2$.

□

3.3.2. *Inverse de l'inverse.*

**Proposition 6.** Soit $A$ une matrice inversible. Alors $A^{-1}$ est aussi inversible et on a :

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$$

*Démonstration.* Par définition de l'inverse, on a

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$$

ce qui démontre le résultat !

$\square$

3.3.3. *Inverse d'un produit.*

**Proposition 7.** Soient $A$ et $B$ deux matrices inversibles de même taille. Alors $AB$ est inversible et

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

**Remarque.** Il faut bien faire attention à l'inversion de l'ordre !

*Démonstration.* Il suffit de montrer $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ et $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. Cela suit de

$$\begin{aligned} & (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I, \\ \text{et} \quad & (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I. \end{aligned}$$

$\square$

De façon analogue, on montre que si $A_1, \ldots, A_m$ sont inversibles, alors

$$(A_1A_2 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1}A_{m-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

3.3.4. *Simplification par une matrice inversible.* En général la relation $AC = BC$ où $A, B$ et $C$ sont des éléments de $M_n(\mathbb{K})$ n'entraîne pas forcément l'égalité $A = B$.

En revanche, si $C$ est une matrice inversible, on a la proposition suivante :

**Proposition 8.** Soient $A$ et $B$ deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ et $C$ une matrice inversible de $M_n(\mathbb{K})$. Alors l'égalité $AC = BC$ implique l'égalité $A = B$.

*Démonstration.*

— On multiplie à droite l'égalité $AC = BC$ par $C^{-1}$pour obtenir :

$$(AC)C^{-1} = (BC)C^{-1}.$$

— En utilisant l'associativité du produit des matrices on a

$$A(CC^{-1}) = B(CC^{-1}).$$

— D'après la définition de l'inverse, on en déduit $AI = BI$,

d'où $A = B$.

$\square$

**Mini-exercice.**

(1) Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer $A^{-1}$, $B^{-1}$ , $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$, $A^{-2}$.

(2) Calculer l'inverse de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

(3) Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer $2A - A^2$. Sans calculs, en déduire $A^{-1}$.

## 4. Inverse d'une matrice : calcul

But : trouver une méthode efficace pour calculer l'inverse d'une matrice.

La méthode qu'on va étudier est une reformulation de la méthode du pivot de Gauss pour les systèmes linéaires.

Auparavant, nous commençons par une formule directe dans le cas simple des matrices $2 \times 2$.

4.1. **Matrices $2\times 2$.** Considérons la matrice $2\times 2$ : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

**Proposition 9.** Si $ad - bc \neq 0$, alors $A$ est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \tfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

*Démonstration.* On vérifie que si $B = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ alors $AB = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Idem pour $BA$.

$\square$

4.2. **Méthode de Gauss pour inverser les matrices.** La méthode pour inverser une matrice $A$ :

— faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice $A$ jusqu'à la transformer en la matrice identité $I$,

— faire les mêmes opérations élémentaires en partant de la matrice $I$.

On aboutit alors à une matrice qui est $A^{-1}$. La preuve sera vue dans la section suivante.

En pratique, on fait les deux opérations en même temps en adoptant la disposition suivante :

— à côté de la matrice $A$ que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau $(A \mid I)$.

— Sur les lignes de cette matrice augmentée, on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau $(I \mid B)$.

— Alors $B = A^{-1}$.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, la matrice augmentée est $(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Ces opérations élémentaires sur les lignes sont les mêmes que celles sur les systèmes linéaires :

(1) $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$ : on peut multiplier une ligne par un réel non nul (ou un élément de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$).

(2) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la ligne $L_i$ un multiple d'une autre ligne $L_j$.

(3) $L_i \leftrightarrow L_j$ : on peut échanger deux lignes.

**N'oubliez pas** : tout ce que vous faites sur la partie gauche de la matrice augmentée, vous devez aussi le faire sur la partie droite.

4.3. **Un exemple.** Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Voici la matrice augmentée, avec les lignes numérotées :

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2} \\ {\scriptstyle L_3} \end{array}$$

On applique la méthode de Gauss pour faire apparaître des 0 sur la première colonne.
D'abord sur la deuxième ligne par l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \\ \\ \end{array}$$

Puis un 0 sur la première colonne, à la troisième ligne, avec $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \end{array}$$

Ensuite on multiplie la ligne $L_2$ afin qu'elle commence par 1 :

On obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \scriptstyle L_2 \leftarrow -\frac{1}{8} L_2$$

On continue afin de faire apparaiître des 0 partout sous la diagonale, et on multiplie la ligne $L_3$. Ce qui termine la première partie de la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \scriptstyle L_3 \leftarrow 2L_3$$

Il ne reste plus qu'à "remonter" pour faire apparaiître des zéros au-dessus de la diagonale ...

D'abord :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{8} L_3}$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3}$$

Ainsi l'inverse de $A$ est la matrice obtenue à droite :

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

**Attention** : Pour éviter les erreur de calcul, on vérifie que le produit $A \times A^{-1}$ est bien égal à $I$.

**Mini-exercice.**

(1) Si possible calculer l'inverse des matrices : $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \alpha+1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$.

(2) Calculer l'inverse des matrices : $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

## 5. Inverse d'une matrice : systèmes linéaires et matrices élémentaires

### 5.1. **Matrices et systèmes linéaires.**

Le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\, x_1 & + & a_{12}\, x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}\, x_p & = & b_1 \\ a_{21}\, x_1 & + & a_{22}\, x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}\, x_p & = & b_2 \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{n1}\, x_1 & + & a_{n2}\, x_2 & + & \cdots & + & a_{np}\, x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}.$$

**Vocabulaire :**

- $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice des coefficients du système,
- $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est le vecteur du second membre,
- $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ est une solution du système si et seulement si $AX = B$.

Nous avons énoncé (sans démonstration) dans le cours sur les systèmes linéaires que :

**Théorème 1.** Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.

On avait démontré ce résultat dans le cas de systèmes particuliers : les systèmes échelonnés réduits. On va démontrer plus bas qu'on peut toujours s'y ramener, ce qui achèvera la démonstration du Théorème 1 dans le cas général.

5.2. **Matrices inversibles et systèmes linéaires.** Considérons le cas où le nombre d'équations égale le nombre d'inconnues :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}.$$

Alors $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée et $B$ un vecteur de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

**Proposition 10.** Si la matrice $A$ est inversible, alors la solution du système $AX = B$ est unique et est :

$$\boxed{X = A^{-1}B.}$$

*Démonstration.* Si $X = A^{-1}B$, alors

$$AX = A\big(A^{-1}B\big) = \big(AA^{-1}\big)B = I \cdot B = B$$

donc $X$ est solution.
Réciproquement si $AX = B$, alors nécessairement $X = A^{-1}B$ par multiplication à gauche par l'inverse de $A$.

□

Nous verrons bientôt que si la matrice n'est pas inversible :
— soit il n'y a pas de solution,
— soit il y en a une infinité.

5.3. **Les matrices élémentaires.** Pour

— calculer l'inverse d'une matrice $A$,

— résoudre des systèmes linéaires,

nous avons utilisé trois opérations élémentaires sur les lignes qui sont :

(1) $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$ : on peut multiplier une ligne par un élément de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$.

(2) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la ligne $L_i$ un multiple d'une autre ligne $L_j$.

(3) $L_i \leftrightarrow L_j$ : on peut échanger deux lignes.

Nous allons définir trois matrices élémentaires $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$, $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$, $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$ correspondant à ces opérations.

Plus précisément, le produit $E \times A$ correspondra à l'opération élémentaire effectuée sur $A$.

(1) La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$ est la matrice obtenue en multipliant par $\lambda$ la $i$-ème ligne de la matrice identité $I_n$, où $\lambda$ est un nombre réel non nul.

$$E_{L_2 \leftarrow 5L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$ est la matrice obtenue en ajoutant $\lambda$ fois la $j$-ème ligne de $I_n$ à la $i$-ème ligne de $I_n$.

$$E_{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$ est la matrice obtenue en permutant les $i$-ème et $j$-ème lignes de $I_n$.

$$E_{L_2 \leftrightarrow L_4} = E_{L_4 \leftrightarrow L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les opérations élémentaires sur les lignes sont réversibles, ce qui entraîne l'inversibilité des matrices élémentaires.

Par exemple :

(1) L'inverse de $E_{L_2 \leftarrow 5L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $E_{L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) L'inverse de $E_{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $E_{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) L'inverse de $E_{L_2 \leftrightarrow L_4} = E_{L_4 \leftrightarrow L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est ... elle-même !

Le résultat de la multiplication d'un matrice élémentaire $E$ par $A$ est la matrice obtenue en effectuant l'opération élémentaire correspondante sur $A$. Ainsi :

**Lemme 1.** (1) La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i} \times A$ est la matrice obtenue en multipliant par $\lambda$ la $i$-ème ligne de $A$.

(2) La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j} \times A$ est la matrice obtenue en ajoutant $\lambda$ fois la $j$-ème ligne de $A$ à la $i$-ème ligne de $A$.

(3) La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j} \times A$ est la matrice obtenue en permutant les $i$-ème et $j$-ème lignes de $A$.

*Démonstration.* Calcul direct.

□

**Exemple 15.**

(1)

$$E_{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{3}y_1 & \frac{1}{3}y_2 & \frac{1}{3}y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

(2)

$$E_{L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 7z_1 & x_2 - 7z_2 & x_3 - 7z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

(3)

$$E_{L_2 \leftrightarrow L_3} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

5.4. **Équivalence à une matrice échelonnée.**

**Définition 8.** Deux matrices $A$ et $B$ sont dites ***équivalentes par lignes*** si l'une peut être obtenue à partir de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \sim B$.

**Définition 9.** Une matrice est ***échelonnée*** si :
— le nombre de zéros commençant une ligne croît strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros.

Elle est ***échelonnée réduite*** si en plus :
— le premier coefficient non nul d'une ligne (non nulle) vaut 1 ;
— et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemple d'une matrice échelonnée (à gauche) et échelonnée réduite (à droite) ; les $*$ désignent des coefficients quelconques, les $+$ des coefficients non nuls :

$$\begin{pmatrix} + & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & + & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & + & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Théorème 2.** Étant donnée une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice échelonnée réduite $U$ obtenue à partir de $A$ par des opérations élémentaires sur les lignes.

Ce théorème permet donc de se ramener par des opérations élémentaires à des matrices dont la structure est beaucoup plus simple : les matrices échelonnées réduites.

On en déduit :

*Démonstration.* [(du théorème 1)] Il suffit d'appliquer le théorème 2 à la matrice du système linéaire considéré.

$\square$

On va traiter un exemple avant de faire la démonstration du théorème 2.

**Exemple 16.** Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**A. Passage à une forme échelonnée.**

Première itération de la boucle, étape A.1. Le choix du pivot est tout fait, on garde $a^1_{11} = 1$.

Première itération de la boucle, étape A.2. On ne fait rien sur la ligne 2 qui contient déjà un zéro en bonne position et on remplace la ligne 3 par $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$. On obtient
$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Deuxième itération de la boucle, étape A.1. Le choix du pivot est tout fait, on garde $a^2_{22} = 2$.

Deuxième itération de la boucle, étape A.2. On remplace la ligne 3 avec l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. On obtient
$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est échelonnée.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

**B. Passage à une forme échelonnée réduite.**

Étape B.1, homothéties. On multiplie la ligne 2 par $\frac{1}{2}$ et la ligne 3 par $-\frac{1}{2}$ et l'on obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Étape B.2, première itération. On ne touche plus à la ligne 3 et on remplace la ligne 2 par $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$. On obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Étape B.2, deuxième itération. On ne touche plus à la ligne 2 et on remplace la ligne 1 par $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$. On obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est bien échelonnée et réduite.

**Mini-exercice.** (1) Écrire les matrices $4 \times 4$ correspondant aux opérations élémentaires : $L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4}L_2$, $L_1 \leftrightarrow L_4$. Sans calculs, écrire leurs inverses.

(2) Écrire la matrice $3 \times 3$ de l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 + 3L_3$.

(3) Écrire les matrices suivantes sous forme échelonnée, puis échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

**Théorème 2.** (*rappel de l'énoncé*) Étant donnée une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice échelonnée réduite $U$ obtenue à partir de $A$ par des opérations élémentaires sur les lignes.

*Démonstration.* Nous admettons l'unicité.

L'existence se démontre grâce à l'algorithme de Gauss. L'idée générale consiste à utiliser des substitutions de lignes pour placer des zéros là où il faut de façon à créer d'abord une forme échelonnée, puis une forme échelonnée réduite.

Soit $A$ une matrice $n \times p$ quelconque.

**Partie A. Passage à une forme échelonnée.**

**Étape A.1.** *Choix du pivot.*

On commence par inspecter la première colonne.

— Soit elle ne contient que des zéros, auquel cas on passe directement à l'étape A.3,

— soit elle contient au moins un terme non nul. On choisit alors un tel terme, que l'on appelle le ***pivot***.

  — Si c'est le terme $a_{11}$, on passe directement à l'étape A.2 ;

  — si c'est un terme $a_{i1}$ avec $i \neq 1$, on échange les lignes 1 et $i$ ($L_1 \leftrightarrow L_i$) et on passe à l'étape A.2.

Au terme de l'étape A.1 :

— soit la matrice $A$ a sa première colonne nulle (à gauche)

— soit on obtient une matrice équivalente dont le premier coefficient $a'_{11}$ est non nul (à droite)

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = A \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a'_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a'_{np} \end{pmatrix} \sim A.$$

**Étape A.2.** *Élimination.*

— On ne touche plus à la ligne 1,

— On se sert du pivot $a'_{11}$ pour éliminer tous les termes $a'_{i1}$ (avec $i \geqslant 2$) situés sous le pivot.

Pour cela, il suffit de remplacer la ligne $i$ par elle-même moins $\frac{a'_{i1}}{a'_{11}} \times$ la ligne 1, ceci pour $i = 2, \ldots, n$ : $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a'_{21}}{a'_{11}} L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a'_{31}}{a'_{11}} L_1, \ldots$

Au terme de l'étape A.2, on a obtenu une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a''_{i2} & \cdots & a''_{ij} & \cdots & a''_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a''_{n2} & \cdots & a''_{nj} & \cdots & a''_{np} \end{pmatrix} \sim A.$$

**Étape A.3.** *Boucle.*

Au début de l'étape A.3, on a obtenu dans tous les cas de figure une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1j}^1 & \cdots & a_{1p}^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2j}^1 & \cdots & a_{2p}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2}^1 & \cdots & a_{ij}^1 & \cdots & a_{ip}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^1 & \cdots & a_{nj}^1 & \cdots & a_{np}^1 \end{pmatrix} \sim A$$

dont la première colonne est bien celle d'une matrice échelonnée. On va donc conserver cette première colonne.

- Si $a_{11}^1 \neq 0$, on conserve aussi la première ligne, et l'on repart avec l'étape A.1 en l'appliquant cette fois à la sous-matrice $(n-1) \times (p-1)$ (ci-dessous à gauche : on "oublie" la première ligne et la première colonne de $A$).

- Si $a_{11}^1 = 0$, on repart avec l'étape A.1 en l'appliquant à la sous-matrice $n \times (p-1)$ (à droite, on "oublie" la première colonne) :

$$\begin{pmatrix} a_{22}^1 & \cdots & a_{2j}^1 & \cdots & a_{2p}^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i2}^1 & \cdots & a_{ij}^1 & \cdots & a_{ip}^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n2}^1 & \cdots & a_{nj}^1 & \cdots & a_{np}^1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{12}^1 & \cdots & a_{1j}^1 & \cdots & a_{1p}^1 \\ a_{22}^1 & \cdots & a_{2j}^1 & \cdots & a_{2p}^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i2}^1 & \cdots & a_{ij}^1 & \cdots & a_{ip}^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n2}^1 & \cdots & a_{nj}^1 & \cdots & a_{np}^1 \end{pmatrix}$$

Au terme de cette deuxième itération de la boucle, on aura obtenu une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1j}^1 & \cdots & a_{1p}^1 \\ 0 & a_{22}^2 & \cdots & a_{2j}^2 & \cdots & a_{2p}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ij}^2 & \cdots & a_{ip}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nj}^2 & \cdots & a_{np}^2 \end{pmatrix} \sim A,$$

et ainsi de suite.

Comme chaque itération de la boucle travaille sur une matrice qui a une colonne de moins que la précédente, alors au bout d'au plus $p-1$ itérations de la boucle, on aura obtenu une matrice échelonnée.

Fin de la partie A pour obtenir une forme échelonnée. Il reste à réduire.

**Partie B. Passage à une forme échelonnée réduite.**

**Étape B.1.** *Homothéties.*

On repère le premier élément non nul de chaque ligne non nulle, et on multiplie cette ligne par l'inverse de cet élément. Exemple : si le premier élément non nul de la ligne $i$ est $\alpha \neq 0$, alors on effectue $L_i \leftarrow \frac{1}{\alpha} L_i$. Ceci crée une matrice échelonnée avec des 1 en position de pivots.

**Étape B.2.** *Élimination.*

On élimine les termes situés au-dessus des positions de pivot comme précédemment, en procédant à partir du bas à droite de la matrice. Ceci ne modifie pas la structure échelonnée de la matrice en raison de la disposition des zéros dont on part.

La démonstration du théorème 2 est achevée.

$\square$

**Remarque.** Partant de $A$, à la fin de la démonstration, on a obtenu
- une matrice échelonnée réduite $U$
- un produit de matrices élémentaires $E$

telles que $EA = U$.

Le théorème 2 permet de donner la définition suivante.

**Définition 10.** On appelle ***rang*** d'une matrice le nombre de lignes non nulles dans sa forme échelonnée réduite.

Le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est 3 alors que celui de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à 2.

### 5.5. **Matrices élémentaires et inverse d'une matrice.**

**Théorème 3.** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice $A$ est inversible si et seulement si sa forme échelonnée réduite est la matrice identité $I_n$.

*Démonstration.* Notons $U$ la forme échelonnée réduite de $A$. Et notons $E$ le produit de matrices élémentaires (donc $E$ est inversible) tel que $EA = U$.

- $\Longleftarrow$ Si $U = I_n$ alors $EA = I_n$. Ainsi par définition, $A$ est inversible à gauche. On sait (mais on ne l'a pas encore démontré) qu'alors $A$ est inversible, et $A^{-1} = E$.
- $\Longrightarrow$ Nous allons montrer que si $U \neq I_n$, alors $A$ n'est pas inversible.
  - Supposons $U \neq I_n$. Alors la dernière ligne de $U$ est nulle (sinon il y aurait un pivot sur chaque ligne donc ce serait $I_n$).
  - Cela entraîne que $U$ n'est pas inversible : en effet, pour tout matrice carrée $V$, la dernière ligne de $UV$ est nulle ; on n'aura donc jamais $UV = I_n$.
  - Alors, $A$ n'est pas inversible non plus : en effet, si $A$ était inversible, on aurait $U = EA$ et $U$ serait inversible comme produit de matrices inversibles.

$\square$

**Remarque.** Justifions maintenant notre méthode pour calculer $A^{-1}$ : partir de $(A|I)$ pour arriver par des opérations élémentaires sur les lignes à $(I|B)$.

Montrons que $B = A^{-1}$.

Notant $E$ le produit de ces matrices élémentaires, on a $EA = I$. Donc $A^{-1} = E$.

Comme on fait les mêmes opérations sur la partie droite du tableau, alors on obtient $EI = B$. Donc $B = E$.

Conséquence : $B = A^{-1}$.

**Corollaire 1.** Soit $A$ une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La matrice $A$ est inversible.

(ii) Le système linéaire $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ a une unique solution $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Pour tout second membre $B$, le système linéaire $AX = B$ a une unique solution $X$.

*Démonstration.* Nous avons déjà vu $(i) \implies (ii)$ et $(i) \implies (iii)$. Par ailleurs $(iii) \implies (ii)$ est immédiat.

Nous allons montrer $(ii) \implies (i)$.

Nous raisonnons par contraposée : nous allons montrer la proposition équivalente $\text{non}(i) \implies \text{non}(ii)$.

On suppose donc que $A$ n'est pas inversible, et on veut montrer que le système admet plusieurs solutions ...

Si $A$ n'est pas inversible, alors sa forme échelonnée réduite $U$ contient un premier zéro sur sa diagonale, disons à la place $\ell$. Alors $U$ à la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & c_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & c_{\ell-1} & & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \color{red}{0} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}. \qquad \text{On pose} \qquad X = \begin{pmatrix} -c_1 \\ \vdots \\ -c_{\ell-1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $X$ n'est pas le vecteur nul, mais $UX$ est le vecteur nul. Comme $A = E^{-1}U$, alors

$$AX = E^{-1}UX = E^{-1}0 = 0$$

est le vecteur nul. Nous avons donc trouvé un vecteur non nul $X$ tel que $AX = 0$.

$\square$

**Mini-exercice.** Exprimer les systèmes linéaires suivants sous forme matricielle et les résoudre en inversant la matrice :

$$\begin{cases} 2x+4y=7 \\ -2x+3y=-14 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+z=1 \\ -2y+3z=1 \\ x+z=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+t=\alpha \\ x-2y=\beta \\ x+y+t=2 \\ y+t=4 \end{cases}.$$

## 6. Matrices triangulaires, transposition, trace, matrices symétriques

**6.1. Matrices triangulaires, matrices diagonales.** Soit $A$ une matrice de taille $n \times n$. On dit que $A$ est ***triangulaire inférieure*** si ses éléments au-dessus de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i < j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire inférieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On dit que $A$ est ***triangulaire supérieure*** si ses éléments en-dessous de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i > j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire supérieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Exemple 17.** Deux matrices triangulaires inférieures (à gauche), une matrice triangulaire supérieure (à droite) :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Une matrice qui est triangulaire inférieure ***et*** triangulaire supérieure est dite ***diagonale***. Autrement dit : $i \neq j \implies a_{ij} = 0$.

**Exemple 18.** Exemples de matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Exemple 19** (Puissances d'une matrice diagonale)**.** Si $D$ est une matrice diagonale, il est très facile de calculer ses puissances $D^p$ (par récurrence sur $p$) :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad D^p = \begin{pmatrix} \alpha_1^p & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2^p & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n-1}^p & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \alpha_n^p \end{pmatrix}$$

**Mini-exercice.** Montrer que la somme de deux matrices triangulaires supérieures reste triangulaire supérieure. Montrer que c'est aussi valable pour le produit.

**Théorème 4.** Une matrice $A$ de taille $n \times n$, triangulaire, est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls.

*Démonstration.* Supposons que $A$ soit triangulaire supérieure.

Supposons les éléments de la diagonale tous non nuls.

— Alors la matrice $A$ est déjà sous la forme échelonnée.
— En multipliant chaque ligne $i$ par l'inverse de l'élément diagonal $a_{ii}$, on obtient des 1 sur la diagonale.

De ce fait, la forme échelonnée réduite de $A$ sera la matrice identité. Le théorème 3 permet de conclure que $A$ est inversible.

Inversement, supposons qu'au moins l'un des éléments diagonaux soit nul et notons $a_{\ell\ell}$ le premier élément nul de la diagonale.

En multipliant les lignes 1 à $\ell - 1$ par l'inverse de leur élément diagonal, on obtient une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & & & \cdots & * \\ 0 & \ddots & * & \cdots & & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & * & & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \color{red}{0} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}.$$

- La colonne numéro $\ell$ de la forme échelonnée réduite ne contiendra pas de 1 comme pivot.
- La forme échelonnée réduite de $A$ ne peut donc pas être $I_n$
- Donc par le théorème 3, $A$ n'est pas inversible.

Dans le cas d'une matrice triangulaire inférieure, on utilise la transposition (qui fait l'objet de la section suivante) et on obtient une matrice triangulaire supérieure. On applique alors la démonstration ci-dessus.

$\square$

6.2. **La transposition.** Soit $A$ la matrice de taille $n \times p$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

**Définition 11.** On appelle ***matrice transposée*** de $A$ la matrice ${}^tA$ de taille $p \times n$ définie par :

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit : le coefficient à la place $(i, j)$ de ${}^tA$ est $a_{ji}$. Ou encore la $i$-ème ligne de $A$ devient la $i$-ème colonne de ${}^tA$ (et réciproquement la $j$-ème colonne de ${}^tA$ est la $j$-ème ligne de $A$).

**Exemple 20.** La transposée de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$. La transposée de $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ et la transposée de $(1 \quad -2 \quad 5)$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

L'opération de transposition obéit aux règles suivantes :

**Théorème 5.**

(1) ${}^t(A+B) = {}^t A + {}^t B$

(2) ${}^t(\alpha A) = \alpha\, {}^t A$

(3) ${}^t({}^t A) = A$

(4) $\boxed{{}^t(AB) = {}^t B\, {}^t A}$

(5) Si $A$ est inversible, alors ${}^t A$ l'est aussi et on a $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Notez bien l'inversion : ${}^t(AB) = {}^t B\, {}^t A$, comme pour $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

**Remarque :** Le point (5) permet d'achever la démonstration du Théorème 4 dans le cas d'une matrice triangulaire inférieure.

Le résultat suivant est important, mais de démonstration trop difficile pour cette année.

**Théorème 6.** (admis) Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

Par exemple le rang de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \\ 11 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ est au maximum égal à deux.

6.3. **La trace.** Dans le cas d'une matrice carrée de taille $n \times n$, les éléments $a_{11}$, $a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sont appelés les ***éléments diagonaux***.

Sa ***diagonale principale*** est la diagonale $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Définition 12.** La ***trace*** de la matrice $A$ est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de $A$. Autrement dit,

$$\boxed{\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.}$$

**Exemple 21.**

— Si $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, alors $\operatorname{tr} A = 2 + 5 = 7$.

— Pour $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{smallmatrix}\right)$, $\operatorname{tr} B = 1 + 2 - 10 = -7$.

**Théorème 7.** Soient $A$ et $B$ deux matrices $n \times n$. Alors :

(1) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$,

(2) $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$,

(3) $\operatorname{tr}({}^t A) = \operatorname{tr} A$,

(4) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

*Démonstration.*

(1) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, le coefficient $(i, i)$ de $A+B$ est $a_{ii} + b_{ii}$. Ainsi, on a bien $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.

(2) $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$. On a $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha a_{11} + \cdots + \alpha a_{nn} = \alpha(a_{11} + \cdots + a_{nn}) = \alpha \operatorname{tr} A$.

(3) $\operatorname{tr}({}^t A) = \operatorname{tr} A$. Étant donné que la transposition ne change pas les éléments diagonaux, la trace de $A$ est égale à la trace de ${}^t A$.

(4) tr$(AB) =$ tr$(BA)$. Notons $c_{ij}$ les coefficients de $AB$. Alors par définition

$$c_{ii} = a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + \cdots + a_{in}b_{ni}.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcllll} \mathrm{tr}(AB) & = & a_{11}b_{11} & +a_{12}b_{21} & +\cdots & +a_{1n}b_{n1} \\ & & +a_{21}b_{12} & +a_{22}b_{22} & +\cdots & +a_{2n}b_{n2} \\ & & \vdots & & & \\ & & +a_{n1}b_{1n} & +a_{n2}b_{2n} & +\cdots & +a_{nn}b_{nn}. \end{array}$$

On peut réarranger les termes pour obtenir

$$\begin{array}{rcllll} \mathrm{tr}(AB) & = & a_{11}b_{11} & +a_{21}b_{12} & +\cdots & +a_{n1}b_{1n} \\ & & +a_{12}b_{21} & +a_{22}b_{22} & +\cdots & +a_{n2}b_{2n} \\ & & \vdots & & & \\ & & +a_{1n}b_{n1} & +a_{2n}b_{n2} & +\cdots & +a_{nn}b_{nn}. \end{array}$$

En utilisant la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{K}$, la première ligne devient

$$b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1}$$

qui vaut le coefficient $(1,1)$ de $BA$. On note $d_{ij}$ les coefficients de $BA$. En faisant de même avec les autres lignes, on voit finalement que

$$\mathrm{tr}(AB) = d_{11} + \cdots + d_{nn} = \mathrm{tr}(BA).$$

$\square$

**Mini-exercice.**

(1) Montrer que si $A$ est triangulaire supérieure, alors ${}^tA$ est triangulaire inférieure. Et si $A$ est diagonale ?

(2) Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tA \cdot A$, puis $A \cdot {}^t A$.

(3) Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Calculer $\mathrm{tr}(A \cdot {}^t A)$.

6.4. **Matrices symétriques.**

**Définition 13.** Une matrice $A$ de taille $n \times n$ est ***symétrique*** si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si

$$A = {}^tA,$$

ou encore si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$. Les coefficients sont donc symétriques par rapport à la diagonale.

**Exemple 22.** Les matrices suivantes sont symétriques :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exemple 23.** Pour une matrice $B$ quelconque, les matrices $B \cdot^t B$ et ${}^tB \cdot B$ sont symétriques.

Démonstration : ${}^t(B^tB) =^t ({}^tB)^tB = B^tB$. Idem pour ${}^tBB$.

6.5. **Matrices antisymétriques.**

**Définition 14.** Une matrice $A$ de taille $n \times n$ est ***antisymétrique*** si

$$^{t}A = -A,$$

c'est-à-dire si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$.

**Exemple 24.**

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours nuls.

**Exemple 25.** Toute matrice est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Démonstration : Soit $A$ une matrice. Alors $A = B + C$ avec
$$B = \frac{1}{2}(A +^t A) \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{2}(A -^t A).$$
De plus $B$ est symétrique, car
$${}^tB = \frac{1}{2}({}^tA +^t ({}^tA)) = \frac{1}{2}({}^tA + A) = B$$
et $C$ est antisymétrique, car
$${}^tC = \frac{1}{2}({}^tA -^t ({}^tA)) = -C.$$

Exemple :
$$\text{Pour} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{alors} \qquad A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisymétrique}}.$$

**Mini-exercice.**

(1) Soit $A$ une matrice de taille $2 \times 2$ inversible. Montrer que si $A$ est symétrique, alors $A^{-1}$ aussi. Et si $A$ est antisymétrique ?

(2) Montrer que la décomposition d'une matrice sous la forme "symétrique $+$ antisymétrique" est unique.